INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 3 de enero de 2017

Índice general

I. COMPLEMENTO MATEMÁTICO: Geometría y Trigonometría. 3

I.1. INTRODUCCIÓN 3

I.2. GEOMETRÍA PLANA 4

I.2.1. Unidad angular: grados 6

I.3. Ejemplos. Triángulos Semejantes. 8

I.3.1. Triángulos Semejantes. Leyes de Proporcionalidad 9

I.4. Ecuación de una Línea Recta 16

I.5. Otra Unidad Angular: el Radián. 19

I.6. TRIGONOMETRÍA. 22

I.6.1. Definición Geométrica de Seno, Coseno y Tangente. 22

I.6.2. Relación entre trigonometría y geometría 24

I.6.3. Tangente. 27

I.6.4. Teorema del seno 28

I.6.5. Teorema del coseno 29

I.7. PROBLEMAS PROPUESTOS 31

I.8. Bibliografía 44

II. COMPLEMENTO MATEMATICO: Series y Aproximaciones. 49

II.1. SERIES VÍA EJEMPLOS 49

II.1.1. Sucesiones 49

II.1.2. Ejemplos de Series 50

II.2. Series con Infinitos Términos 55

II.3. Series Recurrentes en Física 59

II.3.1. El binomio y el número e. . . . 59
II.3.2. La series correspondents a la función seno y coseno . . . 61
II.4. APROXIMACIÓN PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS: ARCO Y CUERDA . . . 61
II.4.1. Expansión Binomial . . . 63
II.5. ÁREA ENCERRADA BAJO UNA CURVA . . . 66
II.5.1. Area encerrada por la curva $y = x^2$. . . . 66
II.5.2. Método general para evaluar $\sum_{n=1}^{N} n^k$. . . . 69
II.5.3. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n$ . . . 71
II.5.4. Regla del trapecio. . . . 75
II.6. EJERCICIOS . . . 76

III. UNIDADES, DIMENSIONES Y ESTIMACIONES 85
III.1. UNIDADES . . . 86
III.1.1. Introducción . . . 86
III.1.2. Tiempo . . . 86
III.1.3. Longitud . . . 88
III.1.4. Masa . . . 90
III.2. ANALISIS DIMENSIONAL . . . 91
III.3. FISICA, MATEMATICAS Y COMPUTACION . . . 94
III.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES . . . 94
III.5. Comparación de la presión en diferentes situaciones . . . 96
III.5.1. ¿Qué es la presión? . . . 96
III.5.2. El ala de un Boeing Jumbo . . . 96
III.5.3. De personas y autos . . . 97
III.5.4. Comparar la Eficiencia de un Boeing, un Auto y un Picaflor . . . 98
III.5.5. Efectos de Escala en Biología . . . 100
III.6. EJERCICIOS . . . 101
III.7. Bibliografía . . . 102

IV. CINEMATICA EN 1-DIMENSIÓN 105
IV.1. INTRODUCCIÓN: GRÁFICOS . . . 105

IV.2. GRÁFICOS . . . 107
IV.2.1. Ecuación de la recta. . . . 107
IV.2.2. La parábola. . . . 109
IV.3. VELOCIDAD . . . 111
IV.3.1. Velocidad constante. . . . 111
IV.3.2. Velocidad media . . . 114
IV.4. VELOCIDAD INSTANTANEA . . . 121
IV.5. ACELERACION . . . 123
IV.5.1. Definición . . . 123
IV.5.2. Dimensiones y unidades. (SI) . . . 123
IV.5.3. Aceleración constante . . . 124
IV.5.4. La posición en función del tiempo si la aceleración es constante . . . 125
IV.5.5. Fórmulas de cinemática en una dimensión y con aceleración constante. . . . 127
IV.6. EJEMPLOS. . . . 128
IV.7. VISCOSIDAD . . . 136
IV.8. Definición y Aplicación de las Derivadas . . . 136
IV.9. EJERCICIOS . . . 144
IV.10. Problemas Resueltos . . . 156
IV.10.1.**Ejemplo** . . . 156
IV.10.2.**Ejemplo** (Revista **Quantum**, Julio–Agosto 1992, pag. 27.) . . . 158

V. CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES 163
V.1. VECTORES . . . 163
V.1.1. Representación de Vectores en dos Dimensiones . . . 163
V.2. ALGEBRA DE VECTORES . . . 164
V.2.1. Definiciones Generales . . . 164
V.2.2. Método Algebraico . . . 167
V.2.3. Método geométrico . . . 169
V.3. POSICION, VELOCIDAD Y ACELERACION. . . . 171
V.3.1. Vector Posición . . . 171
V.3.2. Vector Velocidad . . . 171

V.3.3. Vector Aceleración . . . 173
V.4. VELOCIDAD RELATIVA . . . 173
V.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION . . . 177
V.5.1. Movimiento Parabólico . . . 178
V.5.2. Fórmulas adicionales para el movimiento en dos dimensiones . . . 191
V.6. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME . . . 194
V.6.1. Parametrización . . . 195
V.6.2. Velocidad en el movimiento circular uniforme . . . 198
V.6.3. Velocidad angular . . . 201
V.7. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES . . . 201
V.7.1. Definición del producto escalar . . . 201
V.7.2. Interpretación geométrica . . . 202
V.7.3. Interpretación analítica . . . 202
V.7.4. Aceleración en un movimiento circular uniforme . . . 205
V.7.5. Interpretación geométrica de la aceleración centrípeta . . . 206
V.8. RESUMEN DEL MOVIMIENTO CIRCULAR . . . 209
V.9. EJERCICIOS . . . 212
V.10. Problemas Resueltos . . . 225

VI. DINAMICA 229
VI.1. INTRODUCCIÓN . . . 229
VI.2. LEYES DE NEWTON, LA SINTESIS FINAL . . . 230
VI.2.1. Unidades y Dimensiones . . . 234
VI.3. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE . . . 234
VI.4. SISTEMAS INERCIALES . . . 240
VI.5. APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON . . . 243
VI.6. EJERCICIOS . . . 261

VII. ROCE ESTÁTICO y CINÉTICO 279
VII.1. CARACTERÍSTICAS DE LA FUERZA DE ROCE . . . 279
VII.1.1. Definición de Fuerza de roce . . . 279

VII.2. EJEMPLOS RESUELTOS 283
VII.2.1. Fuerza de Fricción y Velocidad Relativa. 292
VII.3. EJERCICIOS 296

VIII. RESORTES Y UNA APLICACIÓN: MODELO DE UN SÓLIDO 309
VIII.1. INTRODUCCIÓN 309
VIII.2. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE 312
VIII.2.1. Experimento 312
VIII.3. MODELO DE UN SÓLIDO y EL MÓDULO DE YOUNG 318
VIII.3.1. El Músculo como un Resorte 323
VIII.4. EJERCICIOS 324
VIII.5. PROBLEMAS RESUELTOS 329

IX. OSCILADOR ARMÓNICO 337
IX.1. INTRODUCCIÓN 337
IX.2. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME 339
IX.3. CONDICIONES INICIALES 342
IX.4. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 346
IX.5. OSCILACIONES PEQUEÑAS 348
IX.5.1. Péndulo simple 348
IX.6. EJERCICIOS 351

X. TRABAJO Y ENERGÍA 357
X.1. INTRODUCCIÓN 357
X.2. TRABAJO Y FUERZAS CONSTANTES 359
X.2.1. Trabajo Realizado por un Resorte 364
X.3. ENERGIA 367
X.3.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico 369
X.4. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE 370
X.5. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL 374
X.6. PÉNDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL 378
X.7. EJERCICIOS 379

Capítulo I

COMPLEMENTO MATEMÁTICO: Geometría y Trigonometría.

I.1. INTRODUCCIÓN

Al estudiar el movimiento de un cuerpo y la causa que lo genera requiere aplicar conceptos básicos de geometría en la determinación de su trayectoria y extraer información desde un gráfico. La geometría constituye en este proceso una herramientas fundamental .

El itinerario o trayectoria de un cuerpo es conocer simultáneamente donde y cuando se encuentra un objeto. Determinar la trayectoria en el espacio de un cuerpo a partir de cierta información básica, es lo que entendemos por cinemática.

estilo		
eje	horiz	vert
row	t	x
0	0	-24,197
1	0,1	-21,597
2	0,2	-15,837
3	0,3	-11,936
4	0,4	-7,476
5	0,5	-2,369
6	0,6	1,718
7	0,7	10,543
8	0,8	17,324

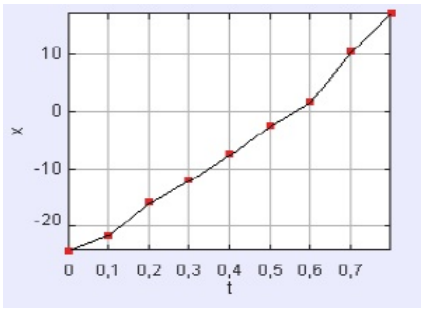


Figura I.1: *A partir de un video del movimiento de una esfera en un riel horizontal, se seleccionaron fotos de la posición de la esfera cada 0,1 segundos y -simultáneamente-, se registró su posición. A partir de esta Tabla de valores, se construye el gráfico que se muestra a la derecha. Existen dos modalidades: los puntos vecinos se unen mediante rectas (como se muestra en la Figura), o se traza una línea recta que pase lo más cerca posible de cada uno de los puntos obtenidos.*

El movimiento más simple es el de un punto (o cuerpo) desplazándose a lo largo de una línea recta. Para describirlo se requiere conocer la posición y el instante correspondiente. A su vez se requieren unidades de tiempo y longitud para que otros puedan compartir nuestro resultado. En principio estas unidades son arbitrarias pero acá utilizaremos el sistema internacional de unidades **SI**, segundos, metros y el kg como unidad de masa.

Para describir la velocidad y aceleración de un cuerpo, se requiere comparar puntos vecinos en el gráfico. Y, sin entrar en detalles, es aquí donde las propiedades geométricas de las curvas son de gran ayuda. Por esta razón estudiaremos geometría básica primero. Además, Newton utilizó geometría para desarrollar su teoría: estamos en buena compañía.

En lo que sigue, incluimos nociones básicas que son útiles en el estudio de la mecánica de Newton. En general no demostramos teoremas. Si el desarrollo de alguno de los temas requiere, en su opinión, más detalles puede consultar algunas de las referencias que se incluyen al final del capítulo.

I.2. GEOMETRÍA PLANA

Es notable que con unos pocos conocimientos elementales de geometría, se pueden demostrar muchos resultados relevantes en mecánica. Por esto comenzamos repasando los teoremas básicos de geometría plana que utilizaremos más adelante.

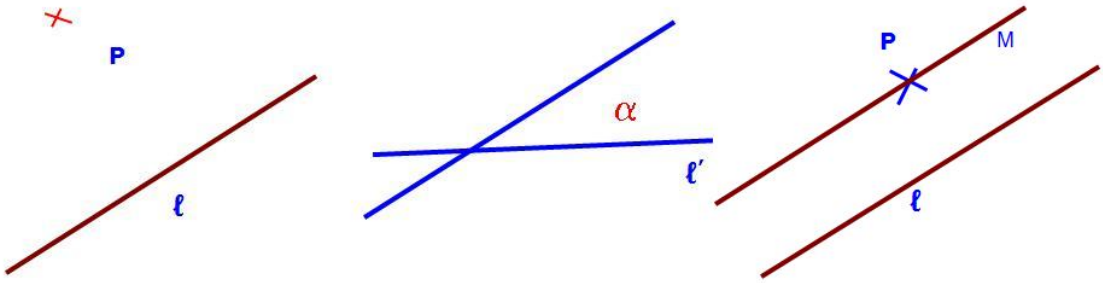


Figura I.2: *Un par de elementos básicos de geometría: un punto, una recta, una recta y un punto externo. La intersección de dos rectas y la definición del ángulo generado:* α.

Los desarrollos incluidos no pretende reemplazar la lógica ni la estructura de un buen libro de geometría. En ocasiones apelamos a la intuición o procuramos construirla. En general, no demostraremos teoremas.

Lo básico es un punto. A continuación, una recta, que en geometría, no tiene ni grosor ni límí-

tes: se extiende hasta infinito y proviene de infinito. Aceptamos estas definiciones, en particular infinito, en forma intuitiva.

Lo siguiente, es considerar el conjunto: un punto exterior **P** y una recta ℓ. Por dicho punto puedo trazar otra recta ℓ'. De acuerdo a la inclinación de la nueva recta, ésta puede cortar (o interceptar) a la anterior hacia la izquierda de **P** o hacia su derecha. Esta no es una definición matemática, pero intuitiva. Si variamos la inclinación de ℓ' adecuadamente, la intersección de ambas rectas pasa de la izquierda hacia la derecha (o viceversa, de acuerdo a cómo uno comenzó). Hay una posición en que la intersección *parece* producirse en infinito (hacia la derecha o hacia la izquierda). En ese caso decimos que ambas rectas son paralelas. Establecemos como axioma que por un punto externo a una recta, se puede trazar una y solo una recta paralela a ella.

Ejercicio

Considere que sucedería con este mismo argumento si resolvemos este problema sobre una esfera y no sobre una mesa plana. ¿Cómo define paralelo en este caso? ¿Cuál es el equivalente de una línea recta en este caso? □

Dos rectas que se cortan en un punto forman un ángulo, α. Podemos clasificar los ángulos de acuerdo a su magnitud como (ver I.3) agudos, obtusos, rectosÉ

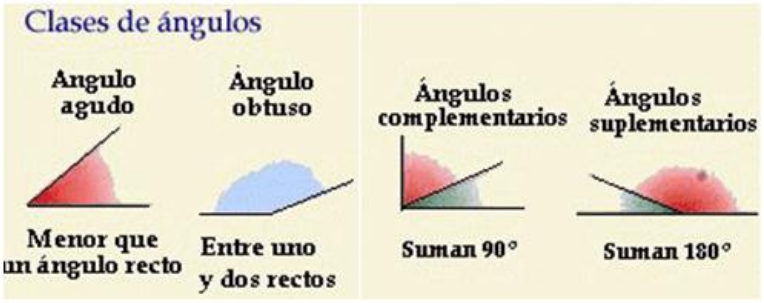


Figura I.3: *Distintos tipos de ángulos. Usamos grados como unidad para para cuantificar la magnitud de los ángulos. En la siguiente sección definiremos esta medida angular.*

Dado un par de rectas que forman un ángulo, podemos trazar una paralela a una de las rectas iniciales. La estrategia es ir armando estructuras con creciente complejidad.

Demostraremos que$\angle$**ABC** y $\angle$**BCD** (ver Figura I.4), son iguales mediante una construcción geométrica: utilizando regla y compás. Si trasladamos paralelamente la recta L_2 mediante una regla y escuadra, debe coincidir con la recta L_1 puesto que son paralelas y solo existe una paralela. El ángulo α (inferior en la figura de la izquierda) debe ser igual a X que aparece en la Figura de la derecha. Si fuera más pequeño (o más grande) que el inicial, entonces las rectas L_1 y L_2 se

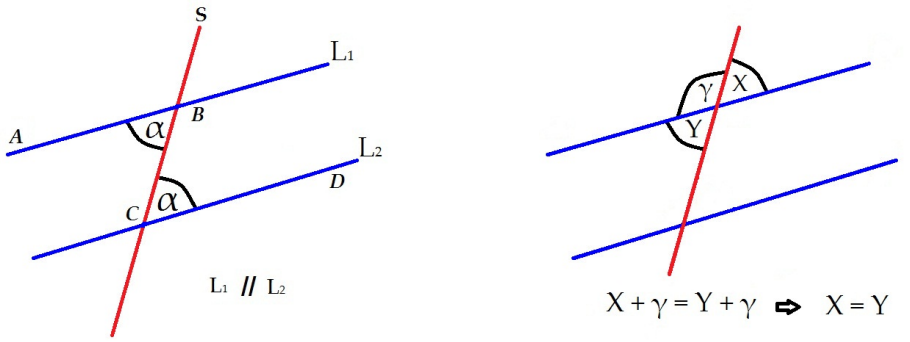


Figura I.4: *Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas. Otra recta cualquiera* **S** *las corta en los puntos* **B** *y* **C** *respectivamente. La misma construcción aparece a la derecha de la Figura. Allí se aprecia que $x + \gamma = 180^o = y + \gamma$entonces, sustrayendo ambas ecuaciones tenemos $x = y$. Hemos demostrado que ángulos opuestos por el vértice son idénticos.*

cortarían en algún punto. Por tanto, como demostramos que $x = y$, los dos ángulos identificados con la letra α en la figura inicial (la ubicada a la izquierda) son iguales.

Los ángulos **ABC** y **BCD** se denominan alternos internos.

Resumiendo, si cortamos las rectas paralelas L_1 y L_2 mediante una tercera recta **S**, podemos verificar, con compás y regla, o demostrar que, todos los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Lo mismo ocurre con los ángulos de la misma naturaleza, definidos en la figura, como $\angle$ **SBL**$_1$ = $\angle$ **BCD**. Esto se extiende a todos los ángulos ubicados en posiciones semejantes. En cada uno de ellos se puede verificar la igualdad ideando un método que incluye traslación paralela.

Otro ejemplo: dos ángulos de la misma naturaleza, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales. La demostración consiste en rotar cada una de las rectas un ángulo de 90^o y trasladarlo hasta la ubicación del otro.

I.2.1. Unidad angular: grados

En toda definición de unidades, existe un grado de arbitrariedad. Los grados se definen como el ángulo que subtiende la $1/360$-ava parte de una circunferencia. Se designan mediante el símbolo $(^\circ)$ grados, $(')$ minutos y $(")$ segundos .

Estas unidades son *sexagesimales*: cada unidad contiene 60 subunidades: 1 grado contiene 60 minutos, 1 minuto contiene 60 segundos. Las mediciones de longitud son *decimales*, 1 metro contiene 10 decímetros, un decímetro 10 centímetros,É

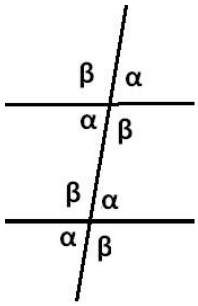


Figura I.5: *Resumen de las igualdades entre los distintos ángulos generados por dos rectas paralelas y una que intercepta ambas. Ángulos iguales se identifican con la misma letra.*

El origen del sistema sexagesimal se asocia con el pueblo Sumerio, aproximadamente 2500 años AdC.

Las equivalencias son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
360^\circ &\equiv \text{ un giro completo alrededor de un circunferencia.} \\
180^\circ &\equiv 1/2 \text{ vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
90^\circ &\equiv 1/4 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
45^\circ &\equiv 1/8 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
1^\circ &\equiv 1/360 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
1^\circ &\equiv 60', \text{ sesenta minutos.} \\
1' &\equiv 1/216{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.} \\
1'' &= 1/60 \text{ de un minuto.} \\
1'' &\equiv 1/12{,}960{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.}
\end{aligned}
$$

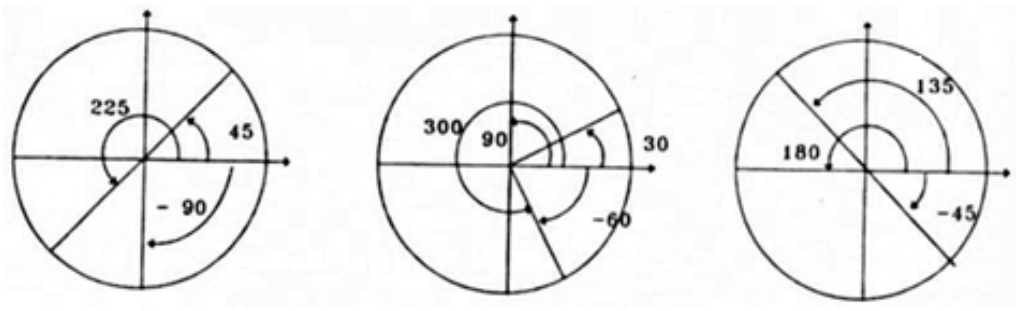


Figura I.6: *Se ilustran diversos ángulos:* 180°, 90°, 45°*, y otros. Se indica además, el sentido positivo y negativo de un ángulo.*

I.3. Ejemplos. Triángulos Semejantes.

A partir de tres rectas arbitrarias (que no son paralelas entre sí) definimos un triángulo cualquiera. Esta figura geométrica es particularmente útil en la resolución de problemas en mecánica. Nos interesa, por tanto, conocer sus propiedades más relevantes para poder utilizarlas cuando se requieran.

Ejemplo

a.- Demostrar que los ángulos interiores de un triángulo suman 180^o.

b.- Demostrar que la prolongación de uno de los lados genera, en el vértice de la intersección con el lado concurrente, un ángulo igual a la suma de los dos ángulos opuestos al vértice de concurrencia.

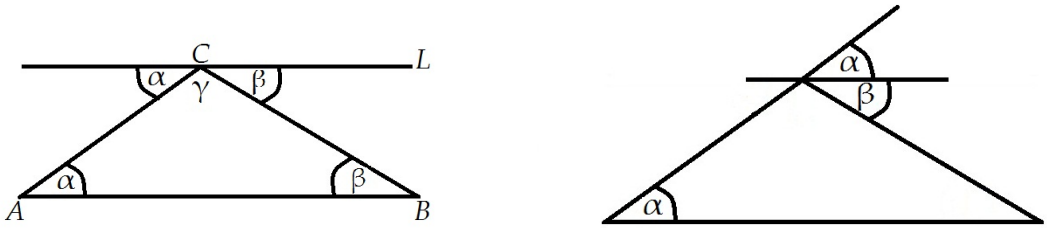


Figura I.7:

Solución

a.- Si por el vértice **C** trazamos una recta **L** paralela a la base $\overline{AB}$, generamos dos ángulos adicionales. Recordando la definición de ángulos alternos internos, podemos identificar los ángulos que por ser de la misma naturaleza y estar entre dos rectas paralelas cortadas por una secante son iguales. Los denominamos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$. De la Figura se desprende que: $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

b.- Al prolongar el lado **AC** más allá del vértice **C** se forma una recta y un ángulo de 180^o. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo plano suman precisamente 180^o, se obtiene que el complemento de γ en la figura es $\alpha + \beta$.
□

Con este resultado, podemos demostrar que un triángulo queda determinado en forma **única** si nos damos un segmento $|\mathbf{A}\,\mathbf{B}|$ y los dos ángulos asociados al vértice **A** y al vértice **B**. Otra forma de escribirlo es la siguiente: si dos triángulos tienen un lado igual y sus ángulos adyacentes (los

que se ubican en cada uno de los vértices de este lado) iguales, entonces los triángulos son iguales.

Para demostrar este resultado, trazamos el segmento dado $|\mathbf{A}\,\mathbf{B}|$ y por cada uno de sus extremos trazamos una recta que forme un $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ con ella. Si estos ángulos suman menos de 180^o estas dos rectas siempre se cortan en un punto, que es el vértice del triángulo buscado.

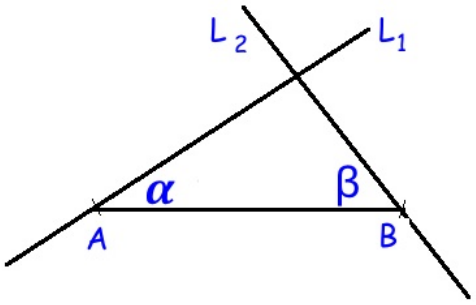


Figura I.8: *Dado un lado y los ángulos adyacentes a los vértices* **A** *y* **B***, el triángulo queda determinado en forma única.*

Ejercicio

Si nos dan un segmento $|\mathbf{AB}|$, un ángulo adyacente α y el ángulo en el *vértice opuesto al segmento dado*: ¿Podemos afirmar que un triángulo queda determinado en forma única con estos datos?

Note que este es un caso diferente al ejemplo anterior. Sólo uno de los ángulos se ubica en el vértice del trazo dado.
□

Para encontrar más propiedades debemos incluir familias de triángulos que tengan alguna característica relevante en común. Triángulos con uno de sus ángulos igual a 90^o parecen ser los primeros reconocidos históricamente desde el tiempo de los sumerios. Cualquier triángulo puede ser descompuesto en un par de triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras está definido en estos triángulos. Veremos en este capítulo, que al incluir la proporcionalidad entre los lados de un triángulo rectángulo, llegamos naturalmente a la trigonometría.

I.3.1. Triángulos Semejantes. Leyes de Proporcionalidad

Los triángulos semejantes son aquellos cuyos ángulos son respectivamente iguales. La propiedad más relevante en este caso es que dados dos triángulos semejantes, sus lados respectivos están en la misma razón de proporcionalidad.

Un caso particular es aquel en el cual los lados respectivos presentan *la misma razón de proporcionalidad*. En este caso los triángulos son iguales, o congruentes.

Otra forma de construir triángulos semejantes es: dado un triángulo arbitrario, Ud. alarga (o encoge) cada lado por un factor λ. El resultado es un triángulos semejante. Todos los lados crecen (o encogen) de acuerdo al factor λ.

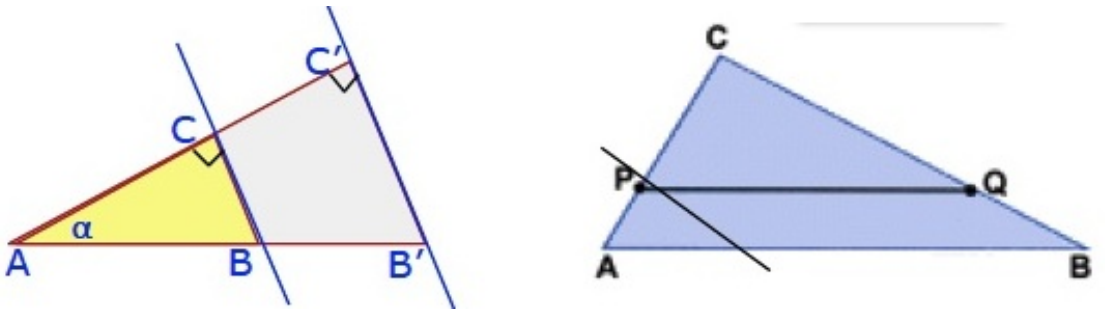


Figura I.9: *Dos ejemplos de triángulos semejantes. En ambos casos podemos establecer diversas relaciones de proporcionalidad al comparar distintos triángulos. semejantes*

Ejercicio

Utilizando la ley de proporcionalidad en triángulos semejantes, identifique los triángulos semejantes (ver Figura I.9) que se utilizaron para escribir las igualdades indicadas a continuación.

$$\frac{\overline{C\,P}}{\overline{C\,A}} = \frac{\overline{C\,Q}}{\overline{C\,B}}, \quad \frac{\overline{P\,C}}{\overline{A\,P}} = \frac{\overline{Q\,C}}{\overline{Q\,B}}, \quad \frac{\overline{P\,A}}{\overline{C\,A}} = \frac{\overline{Q\,B}}{\overline{C\,B}}.$$

Basta encontrar los triángulos semejantes pertinentes para encontrar estas razones.
En el triángulo **ABC** a la derecha de la Figura, el segmento **P Q** es paralelo a la base **AB**.

Algunos sitios donde pueden encontrar dos demostraciones diferentes de este teorema:

www.youtube.com/watch?v=JOhOHCNevVw

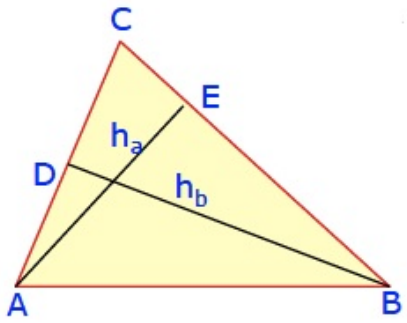
www.youtube.com/watch?v=xV9rvDiwwkY&index=44&list=
PLLYf1wFEASGQQC6a5gp2vZUUGqqzmOK7d

Esta última es geométrica, sin palabras y elegante.

Un sitio que reúne más información acerca de este tema es:
www.youtube.com/playlist?list=PLLYf1wFEASGQQC6a5gp2vZUUGqqzmOK7d
□

Ejemplo

Utilizando la semejanza de triángulos demuestre que el área de un triángulo es la misma, cualquiera sea el lado que se considere como base.



Para demostrarlo basta reconocer que los triángulos $\Delta AEC \sim \Delta BDC$. Ambos tienen un ángulo en común y otro ángulo recto en los vértices **D** y **E**. Por tanto sus tres ángulos son iguales y estos triángulos son semejantes (ver Fig. adjunta). Se cumple entonces la proporcionalidad

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}, \quad \text{identificando los segmentos respectivos, tenemos:} \quad \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a}.$$

Trazando la altura restante podemos obtener una ecuación adicional. Ordenando estas igualdades obtenemos: $a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c$. Estas expresiones son el doble del valor asociado al área de un triángulo medido desde cualquiera de sus lados.
□

Ejemplo

Considere los triángulos semejantes formados por las rectas L_1 y L_2, que se cortan en un punto **A** y las dos rectas paralelas y a su vez perpendiculares a L_1. Utilizando las letras indicadas en la Fig. I.10, demostrar que se cumplen las siguientes relaciones

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{I.1}$$

Nota: Puede ver el video
www.youtube.com/watch?v=xV9rvDiwwkY&index=44&list=
PLLYf1wFEASGQQC6a5gp2vZUUGqqzmOK7d

Solución

Basta con probar que el área del △**AEC** es igual al área del △**ABD**.

Considere el área de los triángulos $\Delta\,EBD$ y $\Delta\,EDC$. Como se puede apreciar de la figura (I.10), es lo que se requiere para demostrar que los dos triángulos: △**ABD** y △**AEC** tienen áreas iguales.

El área del triángulo $\Delta\,EBD$ es $\mathbf{DE} \times \mathbf{BC}/2$. Sin embargo el área del triángulo $\Delta\,EDC$ es también $\mathbf{BE} \times \mathbf{BC}/2$. Con esto se cumple lo buscado inicialmente. Como las áreas de los triángu-

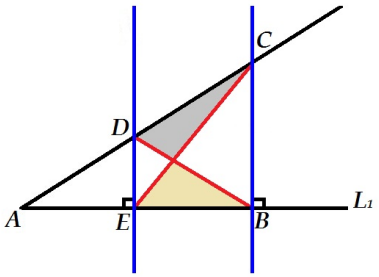
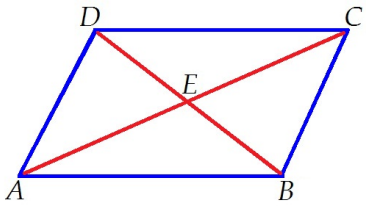


Figura I.10: *Calculando el área de los dos triángulos achurados de la Figura, se demuestra la igualdad buscada.*

los $\triangle$**AEC** y $\triangle$**ABD** son iguales, se cumple que:

$$\mathbf{AE} \times \mathbf{BC} = \mathbf{AB} \times \mathbf{ED} \quad \text{o,} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{I.2}$$



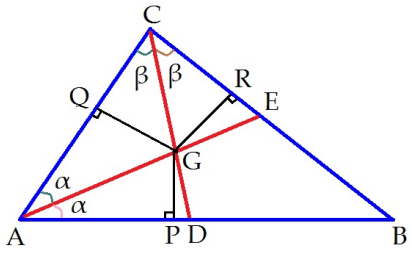


Figura I.11: *En el paralelogramo se utilizan las relaciones entre los ángulos correspondientes y alternos internos de la misma naturaleza. Para el caso de las bisectrices, se construyen tres triángulos congruentes mediante las perpendiculares trazadas desde* **G**.

Ejemplo

Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se dimidian (se cortan en su punto medio). Figura izquierda de (I.11).

Solución

Considere los triángulos $\triangle$**ABE** y $\triangle$**CED**. Tienen un ángulo opuesto por el vértice en **E**. Como los lados **AB** y **DC** son paralelos, los ángulos de la base de ambos triángulos son iguales. Por ejemplo, el ángulo del vértice **A** y **C** son iguales por ser ángulos correspondientes. Lo mismo ocurre en el vértice **B D**. Los dos triángulos mencionados son entonces (al menos) semejantes puesto que tienen todos sus ángulos respectivos iguales. Pero, como **AB** y **DC** son iguales, por ser lados opuestos de un paralelogramo, entonces ambos triángulos son congruentes. De esta forma los lados correspondientes **AE** y **EC** son iguales y así también **DE** y **BE**. Las diagonales en un paralelogramo cualquiera se dimidian. □

Ejemplo

a.- Demostrar que las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un solo punto.

b.- Demostrar que las tres alturas de un triángulo se cortan en un solo punto.

c.- Demostrar que las tres simetrales (rectas que perpendiculares a cada uno de los lados de un triángulo y trazadas por el punto medio de los lados respectivos) se cortan en un solo punto.

d.- Demostrar que las tres transversales de gravedad (rectas que unen el vértice con el punto medio del lado opuesto) de un triángulo se cortan en un solo punto.

Solución de la parte a.-

Si trazamos dos bisectrices desde los vértices **A** y **C**, necesariamente se cortan en un punto **G** siempre dentro del triángulo. Figura a la derecha en (I.11).

A partir de dicho punto **G** se traza una perpendicular a cada uno de los lados del triángulo. Con esta construcción se forman dos pares de triángulos en cada vértice desde donde se trazó una bisectriz. Cada uno de ellos tiene un lado común (la bisectriz) y el ángulo adyacente igual. Como el ángulo opuesto al lado común mide 90^o, todos los ángulos son iguales y por tanto este par de triángulos son congruentes. El mismo argumento es válido para el triángulo formado por la bisectriz trazada desde el otro vértice, supongamos que es **C**.

En consecuencia, a partir de la bisectriz trazada desde **A** , tenemos que **GP** = **GQ** y aquella trazada desde **C** ocurre que **GQ** = **GR**, entonces **GP** = **GR**. Si unimos el vértice **B** con **G**, el par de triángulos $\triangle$ **BPG** y $\triangle$**BGR** son congruentes, por las siguientes razones: tienen dos lados iguales **GP** = **GR**, el lado **BG** es común a ambos y los ángulos rectos en los vértices **P** y R. Con esto hemos demostrado que los triángulos $\triangle$ **BPG** y $\triangle$**BGR** son congruentes y por tanto **BG** es la bisectriz del ángulo β correspondiente al vértice **B**.

Por tanto las tres bisectrices se cortan en un solo punto que denominamos **G**.
□

Ejemplo

Considere un ángulo cualquiera inscrito en la circunferencia (su vértice está en la circunferencia). Demuestre que el ángulo inscrito α es la mitad del ángulo central β (cuyo vértice está en el centro de la circunferencia) que subtiende el mismo arco.

Usando este resultado muestre que todo triángulo rectángulo, está inscrito en una circunferencia cuya hipotenusa coincide con el diámetro de la circunferencia.

Figura I.12: *En esta demostración se utilizan las propiedades de un triángulo isósceles y del ángulo externo en un triángulo. Se resuelven dos casos: el simétrico (izquierda) y el caso donde el centro de la circunferencia se ubica fuera del área del triángulo.*

Solución

Considere el ángulo simétrico con respecto al vértice y al centro de la circunferencia (Figura I.12 izquierda). Si denominamos α a la mitad del ángulo del vértice, entonces el ángulo central que subtiende el mismo arco es $\beta = 2\,\alpha$, puesto que es el ángulo externo del triángulo isósceles $\triangle$**AOB** .

A la derecha aparece un caso más general. Si trazamos un diámetro desde el vértice **B** del ángulo α, se forma el ángulo $(\alpha + \gamma)$ en el vértice. Si consideramos el $\triangle$ **BOC** , tenemos que el ángulo externo es $(\beta + 2\,\gamma)$ y debe ser igual a la suma de los ángulos opuestos a dicho vértice. Como el $\triangle$ **BOC**, es isósceles entonces la suma de los dos ángulos de la base es: $2\,[\,\alpha + \gamma\,]$. Igualando ambos términos, y restando 2γ , obtenemos $\beta = 2\,\alpha$.

□

Ejemplo

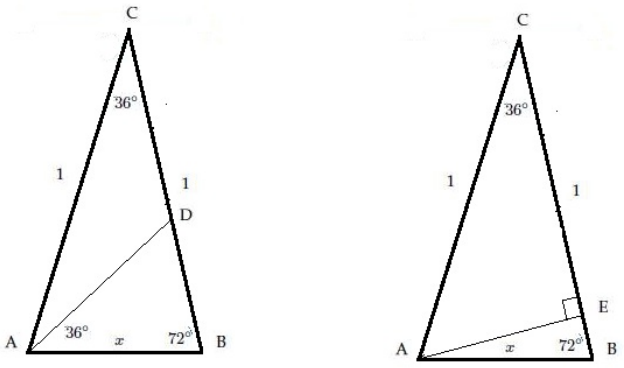


Figura I.13: *En la resolución de este problema aplicamos semejanza de triángulos y la ecuación de segundo grado en x, eligiendo la solución que posea una interpretación geométrica.*

Considere un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice **C** mide 36^o, sus lados iguales tienen una longitud unitaria y su base un largo **x**, cuyo valor debemos encontrar a partir de los datos proporcionados. (Ver figura I.13)
NO DEBE USAR TABLAS, SOLO GEOMETRÍA.

Solución

A partir del vértice **A** trazamos una bisectriz del ángulo de la base. El ángulo queda dividido en dos ángulos de 36^o. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180^o, el nuevo ángulo $\angle$**ADB** = 72^o. De modo que el triángulo $\triangle$**ADB** es isósceles y semejante al triángulo primitivo $\triangle$**ABC**, porque tienen todos sus ángulos iguales. También el triángulo $\triangle$**ADC** es isósceles, porque los ángulos $\angle$**DAC** = $\angle$**ACD** = 36^o. De este modo **CD** = **AD**. Como el triángulo $\triangle$**BAD** es isósceles, entonces **AD** = **x**.
Aplicamos la ley de las proporciones a estos dos triángulos. Debemos distinguir los lados correspondientes para evitar errores en este paso. Hacemos coincidir los vértices **A** con **C** de los triángulos $\triangle$**ADB** y $\triangle$**ABC**, respectivamente, porque ambos corresponden on un ángulos de 36^o. Entonces

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{DB}, \qquad \text{pero como} \quad DB = CB - CD = 1 - CD = 1 - x,$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0. \quad x = [\sqrt{5} - 1]/2.$$

Consideramos sólo la raíz positiva, puesto que **x** debe ser positivo. Con este resultado hemos resuelto el problema.

Podemos calcular las funciones trigonométricas del ángulo 36^o y algunos de sus múltiplos, si trazamos una perpendicular a **BC** desde **A**. Dejamos este ejercicio propuesto.
□

Ejemplo

En un triángulo equilátero de lado **a**, desde un punto **P** se trazan dos perpendiculares a los lados opuestos como se indica en la figura adyacente. Se generan dos segmentos de largo **m** y **n**, conocidos.
Encontrar el valor del área de este triángulo equilátero y expresarlo en función de **m** y **n**.

Solución:

Defino x = |**AP**|, y = | **PB**| con **x+y = a**.

Como es un triángulo equilátero, cualquier altura **h** asociado a este triángulo es h = $\sqrt{3}/(2\,a)$ y **Área =** $\sqrt{3}\,(a/2)^2$.

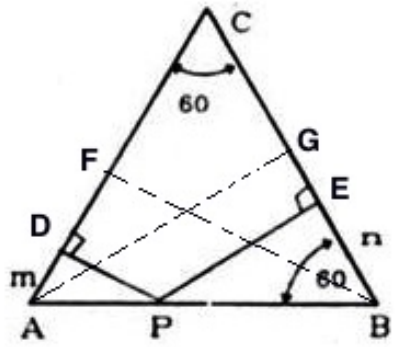
Recurrimos una vez más a la semejanza de triángulos. Si trazamos la altura desde el vértice **A** se generan dos triángulos semejantes $\triangle$**PBE** y $\triangle$**ABG**. Como |**BG**| = a/2, la proporcionalidad de los lados respectivos nos da

$$\frac{n}{a/2} = \frac{y}{a} \qquad n = y/2.$$

Análogamente, a partir de la altura trazada por el vértice **B**, tenemos la siguiente proporcionalidad

$$\frac{m}{a/2} = \frac{x}{a} \qquad m = x/2$$

Como **x + y = a**, obtenemos **m + n = a/2**. De esta forma el área del triángulo equilátero es Área = $\sqrt{3}\,(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2$.



I.4. Ecuación de una Línea Recta

Utilizando la semejanza entre figuras geométricas, nos permitirá definir la multiplicación y división de segmentos y encontrar la ecuación de una recta.

Para ilustrar estos resultados asociamos -en forma intuitiva-, un número a un segmento recto. Esta operación debe ser consistente y definida de una vez para siempre, se aplica igual a todos los segmentos. El número asociado a un segmento de una recta, lo definimos como su longitud.

En el ejemplo siguiente mostramos cómo multiplicar segmentos. Usaremos proporcionalidad y un sistema de ejes coordenados.

Ejemplo

Utilizando las propiedades geométricas de los triángulos, multiplique dos segmentos de longitud **a** y **b**. Use sólo métodos geométricos.

Con este procedimiento, dados dos segmentos podemos generar un tercero, al cual le asociamos un número real (su longitud). Este número es compatible con la definición de longitud utilizada en cada uno de los segmentos iniciales.

Solución

Utilizaremos dos rectas perpendiculares. Esta elección nos aproxima a los sistemas de referencia que utilizaremos para graficar los resultados en cinemática, por ejemplo.

Considerando estas dos rectas perpendiculares, definimos un segmento particular como la medida del largo unitario. Lo copiamos en el *eje horizontal* (ver Figura I.14).

Marcamos el segmento **a** en el *eje vertical*.

Éste es uno de los segmentos a multiplicar. Marcamos el otro segmento a multiplicar, **b**, en el eje horizontal. Unimos los extremos de los segmentos **a** y del largo unitario **1** mediante una recta. Trazamos una paralela a la recta anterior por el extremo del segmento **b**. Con esto se obtiene el segmento definido como **c** y que, mediante el teorema de las proporciones, podemos ver que representa el producto de los segmentos **a** y **b**, $c = a\,b$, como se indica en la Figura I.14.

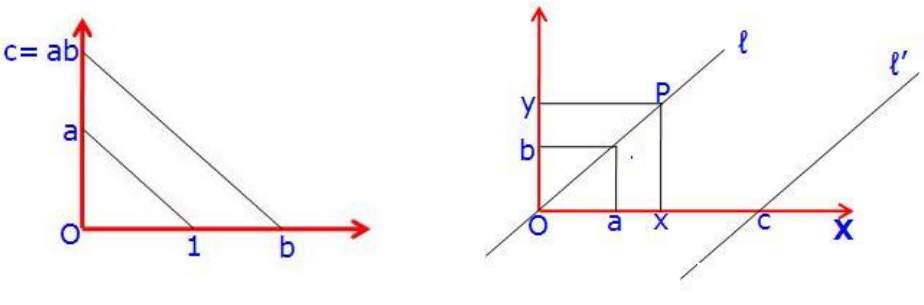
¿Qué sucede si **b** (por ejemplo) tiene un largo menor que la unidad?

¿Qué sucede si generalizamos este protocolo y permitimos que **b** apunte en el sentido opuesto al anterior?

□

Ejemplo

En el sistema de coordenadas de la Figura (I.14), encuentre la ecuación de una recta cualquiera



1 q

Figura I.14: *Se ilustra la operación multiplicación de segmentos mediante triángulossemejantes. También se puede extender a la división de segmentos mediante un procedimiento similar.*

en el plano.

Solución

Definimos los ejes coordenados **X** (denominada abcisa) e **Y** (denominada ordenada).

Usando la definición de un segmento unitario, tenemos a mano una escala para cada uno de los ejes: existe un segmento que representa la unidad y que al repetirlo, tenemos un eje graduado. Incluye todos los números reales puesto que podemos multiplicar segmentos de largo arbitrario, como vimos en el ejemplo anterior.

Primero trazamos una recta cualquiera por el origen y dibujamos dos triángulos semejantes, como se indica en la figura (I.14) a la derecha . Escribimos las proporciones que son relevantes asociadas a este triángulo y obtenemos la ecuación de una recta que pasa por el origen:

$$a/b = x/y \implies y = (b/a)\, x.$$

La recta ℓ' es paralela a ℓ. Copiamos los segmentos **a** y **b** adecuadamente a partir del punto de intersección de ℓ' con la horizontal, y usando la ley de proporcionalidad vemos que sólo debemos incluir el desplazamiento en la coordenada x:

$$y\,/(x\,-\,c)\,=\,(b/a)\;\implies\;y\,=\,(b/a)\,x\,-\,(b\,c)/a.$$

Esta expresión corresponde a la ecuación de una recta cualquiera con pendiente b/a y que corta al eje x, en el punto C. La forma convencional de escribir esta ecuación es $y = m\,x + n$. Daremos un barniz de Funciones en el próximo capítulo.
□

La ecuación de una recta es equivalente a encontrar una regla que asocia a cada valor escogido en el eje horizontal (abcisa) o eje X, un solo valor en el eje Y (ordenada). Ver la Figura I.14 a la derecha. Esta es la idea básica de una función. Se define como **y = f(x)**, donde **f(x)** puede ser la

ecuación de una recta como hemos visto, o un polinomio como $\mathbf{f(x)} = \mathrm{a\,x} + \mathrm{b\,x^2}$, con **a** y **b** son constantes (números) y **x** toma sus valores en el eje **x**. Volveremos a la definición de una función al estudiar cinemática.

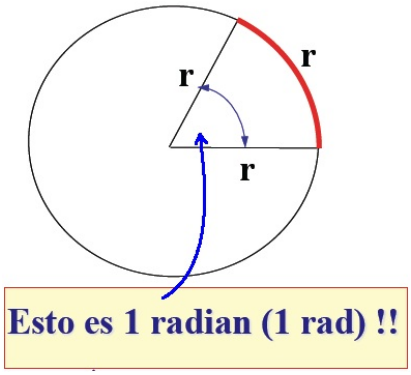
I.5. Otra Unidad Angular: el Radián.

¿Qué es un Radián? ¿Cuál es la necesidad de introducir una nueva definición, como la de radián?

El largo de una circunferencia cualquiera de radio **r**, es $2\,\pi\,\mathbf{r}$. Conviene mirar esta definición desde otra perspectiva: el largo de la circunferencia es proporcional al radio de ella. Nos interesa el factor de proporcionalidad 2π y el ángulo central 360^o.

Por ejemplo, un ángulo central de 90^o corresponde con un arco que es un cuarto de la longitud de la circunferencia. En el caso de un ángulo central de 45^o, el arco de circunferencia es 1/8 del largo total de la circunferencia. En general el arco de circunferencia es proporcional al valor del ángulo central α que subtiende.

Esto es el significado de proporcionalidad entre el ángulo central y el tamaño del arco subtendido. La idea es definir una nueva unidad de medida angular que cumpla dos requisitos: que el largo del arco se obtenga mediante una simple multiplicación del valor del ángulo por el radio de la circunferencia y que esta nueva medida angular sea propocional a los ya conocidos grados^o. Existe una solución y la nueva unidad se define como el radián.



De acuerdo a esta idea, un ángulo de 360^o, una vuelta completa, corresponde a $2\,\pi$ radianes.

Además es una definición que NO depende de la circunferencia usada. Todas las circunferencias concéntricas son semejantes: dado un cierto ángulo, la razón entre el arco subtendido por este ángulo y el radio de la circunferencia correspondiente es el mismo para todas ellas.

Si el arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio, la razón entre el arco y el radio es la unidad y es la forma de definir un radián.

Examinemos algunos ejemplos.

Para visualizar el origen de esta definición realicemos la siguiente operación. Con un compás, dibuje en un papel varios círculos concéntricos de distinto radio. No olvide marcar su centro.

Para cada circunferencia corte un trozo de hilo con un largo igual al radio de la circunferencia correspondiente. Verifique que el ángulo central subtendido para cada una de las circunferencias concéntricas es el mismo. Hemos encontrado así una medida natural para definir una unidad angular: dado una circunferencia cualquiera, el ángulo que subtiende un arco igual a su radio, es UN RADIÁN.

Como el largo de una circunferencia debe ser proporcional al radio, podemos calcular en forma exacta este factor de proporcionalidad y resulta ser $2\,\pi$. Esto corresponde a 360^o. Ahora podemos invertir el proceso: el largo de una arco de circunferencia arbitrario debe ser proporcional al arco que subtiende. Y el factor de proporcionalidad, como vimos es el radio de la circunferencia.

Ejemplo

Considere una rueda sobre un plano. Marque un radio desde el centro al punto de contacto. Desplace la rueda, sin resbalar, una distancia igual a su radio. ¿Cuál es el valor del ángulo descrito en dicho movimiento?

Por definición es un radián, puesto que al no resbalar el camino recorrido es igual al arco que subtiende el ángulo central.
Note que la distancia que avanza el eje de la rueda depende del tamaño de su radio.

Si el eje (o centro de la circunferencia) avanza la mitad del radio, puede verificar que el ángulo descrito es también la mitad de un radián.
□

En definitiva, la longitud de un arco cualquiera de circunferencia es igual al ángulo central, **medido en radianes** por el radio de la circunferencia. Este resultado es válido para cualquier valor del arco, ya sea pequeño o grande.

$$\text{Longitud del arco de } \odot \;=\; [\text{ ángulo subtendido (en radianes)}] \times \left[\text{Radio de la } \odot\right].$$

$$360^o \;=\; 2\,\pi \;=\; 6{,}28318... \qquad \text{radianes.}$$

La equivalencia con los grados es:

$$1 \text{ radián} \quad = \frac{360^o}{2\,\pi} = 57,29^\circ,$$

aplicando esta conversión podemos obtener las siguientes igualdades:

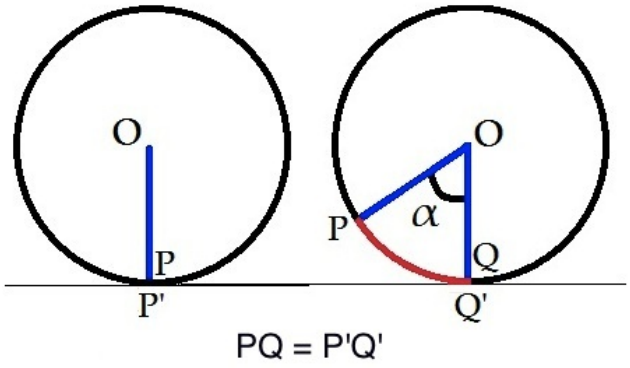
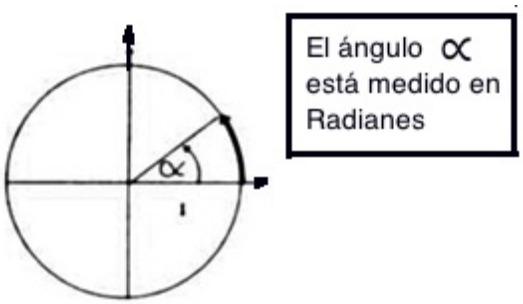


Figura I.15: *Rodar sin resbalar: cada punto de la circunferencia está en contacto con un solo punto del piso, una sola vez. El arco PQ es igual al camino recorrido P'Q'.*

$90°$ equivalen a $(\pi/2)$ radianes,
$45°$ equivalen a $(\pi/4)$ radianes,
$30°$ equivalen a $(\pi/6)$ radianes,
$60°$ equivalen a $(\pi/3)$ radianes.



Ejercicio.

1.- Exprese en radianes los ángulos: a) 45^o, b) 30^o, c) $22^o\ 30'$.

2.- Exprese en grados sexagésimales los ángulos: a) $3\,\pi/4$, b) $7\,\pi/4$, c) $0,3927$ radianes.

3.- Considere el minutero de un reloj de manillas: ¿A cuántos radianes equivale un segundo? ¿A cuántos segundos equivalen a un radián?

4.- La manilla de una máquina da 35 vueltas por minuto sin cambiar su rapidez. ¿Cuánto tiempo tarda en girar 5 radianes?

Nota: una medida de rotación en ingeniería es RPM, que es un acrónimo para Revoluciones (giros completos) Por Minuto. Por ejemplo para que un auto viaje a 120 km/h, su motor gira a 3000 RPM, aproximadamente.
□

I.6. TRIGONOMETRÍA.

I.6.1. Definición Geométrica de Seno, Coseno y Tangente.

Cualquier triángulo puede ser dividido en un par triángulos rectángulos. De esta forma si vamos a definir las razones **seno**, **coseno** y **tangente** pueden ser definidos utilizando los lados de un triángulo rectángulo (Ver Figura I.16).

Con un triángulo rectángulo $\triangle$**OBA** se definen las funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente.

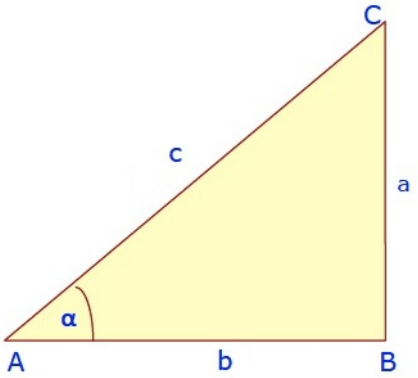


Figura I.16: *Definiciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo cualquiera. Como uno de los ángulos mide 90º ninguno de los dos restantes puede ser mayor que 90º. Es una restricción que será superada con una definición más general en los siguientes párrafos.*

Seno y Coseno de un ángulo referido a un círculo de radio unitario

En un triángulo rectángulo $sen\,\alpha$ es la razón entre el **cateto opuesto** al ángulo α y la hipotenusa.

Coseno de α, $(cos\,\alpha)$ es la razón entre el **cateto adyacente** al ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo que aparece en la Figura (I.16).

Inicialmente lo definimos con respecto a un triángulo rectángulo cualquiera, pero posteriormente nos concentraremos a uno cuya hipotenusa es de largo unitario inserto en una circunferencia de radio unitario. Esto constituye una tremenda ventaja operativa y nos permite extender estas definiciones a una propiedad del ángulo sin mirar el triángulo desde donde nació la idea original. Está basado en que todos los triángulos rectángulos con un ángulo común son semejantes.

Si nos restringimos a una circunferencia de radio unitario, la hipotenusa es la unidad de manera que el valor del coseno está dado directamente por la magnitud del cateto adyacente al ángulo y el seno por la magnitud del cateto opuesto al ángulo referido. Las propiedades encontradas para este triángulo serán válidas también para cualquier familia de triángulos semejantes a él.

Las definiciones anteriores se convierten en

Definición

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &\equiv \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|, \qquad |OA| = 1, \\ cos\,\alpha &\equiv \frac{|OB|}{|OA|} = |OB|, \qquad |OA| = 1. \end{aligned} \tag{I.3}$$

A continuación se incluyen algunos valores de estas funciones que debemos *recordar*:

$$\begin{aligned} sen\,0^\circ &= 0, & \cos\,0^\circ &= 1, \\ sen\,90^\circ &= 1, & \cos\,90^\circ &= 0, \\ sen\,45^\circ &= 1/\sqrt{2}, & cos\,45^\circ &= 1/\sqrt{2}, \\ sen\,30^\circ &= 1/2, & cos\,30^\circ &= \sqrt{3}/2, \\ sen\,60^\circ &= \sqrt{3}/2, & cos\,60^\circ &= 1/2, \end{aligned}$$

Propiedades de estas funciones

Ilustramos aquí las ventajas del uso de la circunferencia unitaria para definir seno, coseno y tangente. Esta definición permite extender la definición a los caso en que el ángulo es mayor que la 90^o, incluir el signo de la función y encontrar relaciones entre ellas. Esta generalización incluye la definición primitiva, que permanece vigente.

Con el uso de la circunferencia unitaria, el seno es la proyección sobre el eje vertical (con un sentido positivo asignado) y puede de esta forma tomar cualquier valor de 0^o a 360^o y ser positiva o negativa de acuerdo al signo que arroja su proyección sobre el eje vertical.
De igual forma el coseno es la proyección sobre el eje horizontal (nuevamente, con sentido positivo asignado) y puede tomar el mismo rango de valores señalado.

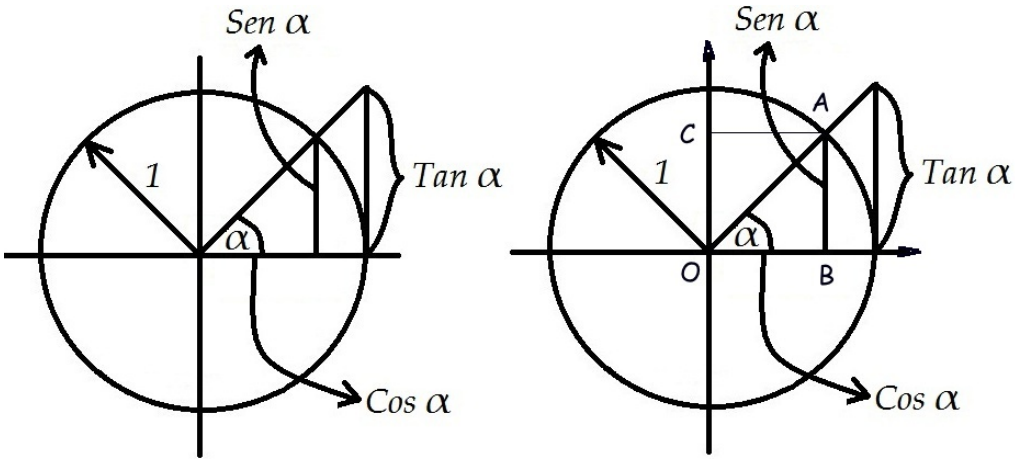


Figura I.17: *Si el radio de la circunferencia es la unidad, el valor de sen α está dado por la proyección del vector* **OA** *sobre el eje vertical y el valor del coseno es la proyección de este mismo vector sobre el eje horizontal. Note que la definición de tangente es también simple.*

Definición

La rotacón de los punteros del reloj se define como **SENTIDO NEGATIVO**. Obviamente el **SENTIDO POSITIVO** es el opuesto y se indica en la Figura. Esta definición es compatible con la regla de la mano derecha.

I.6.2. Relación entre trigonometría y geometría

Las igualdades trigonométricas se pueden recuperar utilizando geometría, como ilustraremos a continuación. A fin de cuentas está en el origen de la trigonometría: las razones entre los lados de un triángulo.

A continuación, un par de ejemplos.

1.– Como en un triángulo rectángulo se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, y en el triángulo de la Figura I.17, $a = sen\alpha$, $b = \cos\,\alpha$ y $c = 1$, entonces

$$(sen\,\alpha)^2 + (\cos\,\alpha)^2 = 1 \tag{I.4}$$

para **cualquier ángulo** α.

(Por convención $(sen\,\alpha)^2 \equiv sen^2\alpha$.)

Esta igualdad se puede comprobar con la lista de valores para el seno y el coseno que se incluyó más arriba.

2.– De la circunferencia de radio unitario (ver Figura I.17 derecha) se pueden obtener, como se afirmó previamente, relaciones entre las definiciones para diferentes ángulos. Mostramos un ejemplo aquí.
$sen\,\alpha = |AB| \equiv |OC|$ (puesto que $CA \,||\, OB$).

Consideramos el triángulo **OAC** tenemos, $|OC| = \dfrac{|OC|}{|OA|} \equiv \cos(90-\alpha)$, de acuerdo a la definición de coseno.

$$\text{De aquí, tenemos:} \quad \cos(90-\alpha) = sen\,\alpha. \tag{I.5}$$

Otras relaciones que se pueden deducir a partir de esta geometría son:

$$\text{s}en(-\alpha) = -\text{s}en\alpha\,, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,, \quad \text{s}en(90^o + \alpha) = \cos\alpha.$$

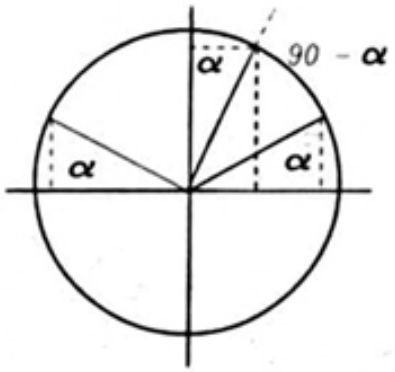


Figura I.18: *De la Figura se desprende que* $sen(180-\alpha) = sen\,\alpha$, *y* $\cos(90-\alpha) = sen\,\alpha$.

Esta igualdad se puede verificar con los valores que aparecen en la lista de funciones seno y coseno incluí das anteriormente, usando geometría como se indica en la Figura I.18.

Ejercicio

Usando la misma figura I.18 demuestre:

$$sen(90-\alpha) = \cos\alpha, \quad sen\,(180^\circ) = 0, \qquad \cos\,(180^\circ) = -1,$$

$$sen\,(270^\circ) = -1, \qquad \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad sen(-30^\circ) = -1/2.$$

Otras relaciones que se desprenden de la geometría de la figura I.17,

$sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$.

$\cos(180 - \alpha) = -\cos\,\alpha.$

Suma y Resta de Ángulos

Ejemplo

A partir del triángulo de la Figura I.19, demuestre la siguiente entre el seno de la suma de un par de ángulos y los valores originales del seno y coseno de cada uno de los ángulos.:

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\ \cos\,\beta + \cos\,\alpha\ sen\,\beta. \tag{I.6}$$

Una forma de encontrar esta igualdad es calcular el área de un triángulo cualquiera de dos maneras diferentes, procurando que en una de ellas tenga protagonismo el ángulo $(\alpha+\beta)$. Utilizaremos el $\triangle$**ABC** de la Figura I.19.

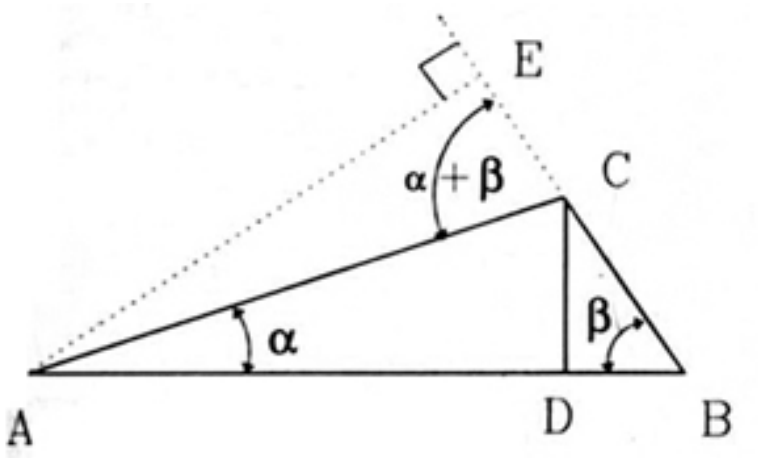


Figura I.19: *Con el Triángulo* ΔABC *demostramos usando solo geometría la expresión de* $sen(\alpha + \beta)$ *en función de los ángulos* α *y* β*.*

Con este criterio escribimos el área usando **H=**$|AE|$, como una de las alturas y $|BC| = a$ como la base correspondiente. La alternativa para calcular la misma área es sumar el área de $\triangle$**ADC** y de $\triangle$**CDB**. Aquí interviene la altura **h =**$|CD|$. Como el área tiene un solo valor, podemos igualar estas expresiones, y obtenemos el resultado esperado.

Con la primera aproximación tenemos:

$$\text{Área -1} = \frac{1}{2}\,H\,|BC| = \frac{1}{2}\,a\,\text{sen}(\alpha + \beta)b, \tag{I.7}$$

Para los otros triángulos, tenemos

$$\text{Área -2} \;=\; \frac{1}{2}\,h\,|AD| \;=\; \frac{1}{2}\,h\,b\,\cos\alpha \;=\; \frac{1}{2}\,a\,\operatorname{sen}(\beta)\,b\,\cos(\alpha). \tag{I.8}$$

Aquí elegimos igualar h utilizando el ángulo β para que aparezcan los lados a y b en ambos lados de la expresión de las áreas. Para el otro triángulo, tenemos

$$\text{Área -3} \;=\; \frac{1}{2}\,h\,|DB| \;=\; \frac{1}{2}\,h\,a\,\cos\beta \;=\; \frac{1}{2}\,b\,\operatorname{sen}(\alpha)\,a\,\cos(\beta). \tag{I.9}$$

Como la suma de las dos últimas áreas deben ser iguales a la primera, obtenemos el resultado buscado.

Otra igualdad trigonométrica, tan recurrente como la anterior I.6 es

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\;\cos\,\beta - sen\,\alpha\;sen\,\beta. \tag{I.10}$$

Se puede obtener de la anterior si consideramos

$$sen(\alpha + 90^o\,+\,\beta) = sen(\alpha\,+\,90^o)\;\cos\,\beta + \cos(\alpha\,+\,90^o)\;sen\,\beta.$$

y usando las relaciones geométricas $sen(90^o\,+\,\alpha) = \cos\,\alpha$ y $\cos(90^o\,+\,\alpha) = -sen\,\alpha$.

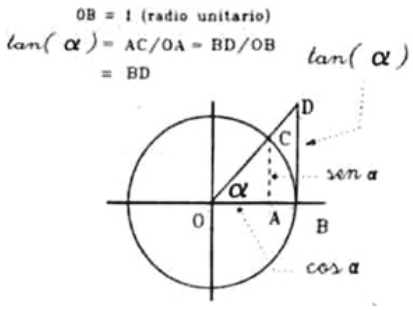
obtenemos la expresión buscada.

I.6.3. Tangente.

La **tangente** de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el adyacente en un triángulo rectángulo.

$$\tan\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \tag{I.11}$$

La tangente, a diferencia del seno y coseno, puede tomar cualquier valor entre $+\infty$ y $-\infty$.



Algunos valores que aparecen frecuentemente se tabulan a continuación:

$$\begin{array}{ll}
\tan(\pi/2) & = +\infty, \\
\tan 0 & = 0, \\
\tan(-\pi/2) & = -\infty, \\
\tan(\pi/4) = \tan 45^\circ & = 1, \\
\tan(\pi/3) = \tan 60^\circ & = \sqrt{3}, \\
\tan(\pi/6) = \tan 30^\circ & = 1/\sqrt{3}, \\
\tan(-\pi/3) = \tan -60^\circ & = -\sqrt{3}
\end{array}$$

Ejercicio

Utilizando la definición de la tangente en función de seno y coseno, demuestre que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\,\alpha + \tan\,\beta}{1 - \tan\,\alpha \times \tan\,\beta}. \quad \square$$

Como la definición utiliza la razón entre los lados de un triángulo rectángulo, siempre podemos invertir estas razones y obtenemos el inverso del seno (que llamamos cosecante), el inverso de la razón del coseno (lo llamamos secante) y lo mismo para la tangente.
Esto es análogo al caso de los números reales: por cada número real distinto de cero, existe un inverso $(x\epsilon\ \Re, x \neq 0)$

$$x\ \times\ \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}\ \times\ x.$$

$$cotan\,\alpha\ \times\ tan\,\alpha = 1, \quad cotan\,\alpha \equiv \text{cotangente de } \alpha = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{BD} \tag{I.12}$$

$$\begin{aligned}
sen\,\alpha\ \times\ cosec\,\alpha = 1, &\qquad cosec\,\alpha = \tfrac{AC}{CB}, \\
cos\,\alpha\ \times\ sec\,\alpha = 1, &\qquad sec\,\alpha = \tfrac{AC}{AB}, \\
cosec\,\alpha &\qquad \equiv \text{cosecante de } \alpha, \\
sec\,\alpha &\qquad \equiv \text{secante de } \alpha.
\end{aligned} \tag{I.13}$$

En general evitaremos usar estas definiciones.

I.6.4. Teorema del seno

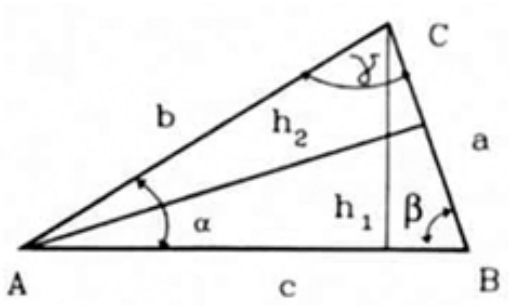
Usando sólo geometría podemos encontrar una relación entre el seno de un ángulo interior de un triángulo y la longitud del lado que lo enfrenta. Esta relación es el teorema del seno.

$$h_1 = b\,sen\,\alpha \quad h_1 = a\,sen\,\beta$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{sen\alpha} \quad = \frac{b}{sen\beta}$$

$$h_2 = c\,sen\,\beta \quad h_2 = b\,sen\,\gamma$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{sen\,\beta} \quad = \frac{c}{sen\,\gamma}$$



De aquí se obtiene *el teorema del seno*:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}. \tag{I.14}$$

I.6.5. Teorema del coseno

Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos que aparecen en la misma Figura, se tiene

$$h_2^2 = b^2 - x^2, \qquad h_2^2 = c^2 - y^2,$$

$$b^2 - x^2 = c^2 - y^2, \qquad y = a - x,$$

expresando y en función de x: $b^2 = c^2 - a^2 + 2\,a\,x,$

pero: $x = b\,\cos\,\gamma,$

introduciendo este término en la última igualdad, obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\,\gamma. \tag{I.15}$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,cos\,\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,\gamma. \end{aligned} \tag{I.16}$$

Ejercicio

Descubra una regla nemotécnica que le permita recordar las fórmulas anteriores.
¿Qué ocurre con el signo frente al término que contiene el coseno de uno de los ángulos cuando éste es mayor que π / 2?

Ejemplo

a.- Encuentre, usando sólo geometría, la expresión para el ángulo doble sen(2 α), en función del ángulo original. Por ejemplo seno y coseno de (α) y constantes numéricas.

b.- Encuentre, geométricamente, una expresión para $\cos(2\alpha)$ en función de $\operatorname{sen}\ \alpha$ y constantes numéricas. Exprese $\cos(2\,\alpha)$ en función de potencias de $cos\alpha$ más constantes numéricas.

c.- Muestre que los dos resultados anteriores se desprenden directamente de la expresión I.6 obtenida anteriormente, para el seno y coseno de la suma de ángulos.

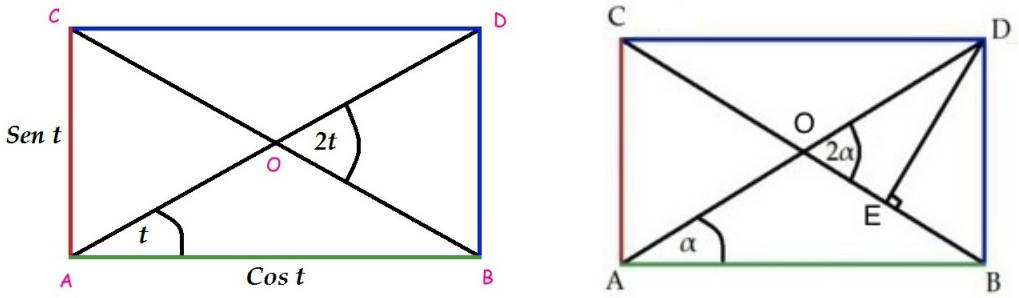


Figura I.20: *Comparando el área de los dos triángulos congruentes generados en este rectángulo, se obtiene l expresión para el ángulo doble.*

Solución

La idea es calcular el área de dos triángulos diferentes que están insertos en el rectángulo **ABCD**. Los valores asignados a los lados del rectángulo no le quitan generalidad a la demostración. Esto es porque cualquier rectángulo es semejante a otro que tenga como lados senα y $\cos\alpha$ para un ángulo α, determinado por el rectángulo escogido.

La estrategia es calcular el área del triángulo Δ**BCD** y el triángulo Δ**BCD** usando los valores asignados a los lados del rectángulo. El área de ambos triángulos es la misma. Como las expresiones tienen el mismo valor, obtenemos una ecuación que contiene una de las expresiones buscadas.

El área del triángulo Δ**BCD** está escrita a la izquierda de la ecuación siguiente. La del triángulo , Δ**BCD** es la expresión a la derecha de la ecuación:

$$\frac{1}{2}\ \operatorname{sen}\ \alpha\ \cos\ \alpha\ =\ \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\ 2\,\alpha}{2}$$

de esta forma obtenemos la respuesta buscada

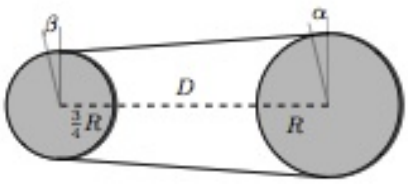
$$\text{sen}(\,2\,\alpha) \;=\; 2\;\text{sen}\;\alpha\;\cos\alpha. \tag{I.17}$$

I.7. PROBLEMAS PROPUESTOS

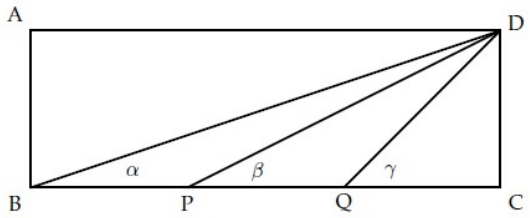
1.- a.- Encuentre el valor de los ángulos α y β que miden el alejamiento angular del punto de contacto de la correa y la circunferencia con respecto a la vertical.

b.- Calcule el largo de la cuerda que rodea a dos cuerdas de radios R y $3R/4$ cuyos ejes están separados por una distancia D.

c.- Calcule el área encerrada por los segmentos de la cuerda situada entre los puntos en que toca a las ruedas y la circunferencia de cada una de las ruedas.

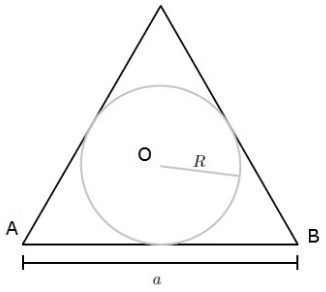


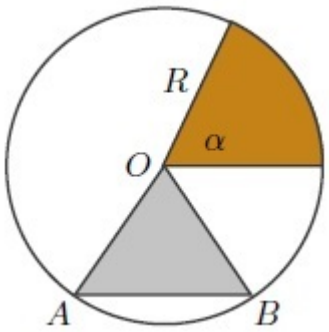
2.- Considere un rectángulo **ABCD** donde el lado **BC = 3 AB**, y **P, Q** son dos puntos sobre el lado **BC** que cumplen la condición **BP = PQ = QC**. Demuestre que, en este caso particular, ocurre que: $\alpha + \beta = \gamma$.



3.- Calcule la razón entre las áreas de un círculo de radio **R** y del triángulo equilátero de lado **a** que lo contiene. Exprese el radio **R** en función de **a**.

4.- a.- Calcule el área del triángulo ABO en función del ángulo $\angle AOB$ y el radio R de la circunferencia. Grafique (a mano alzada) el área de este triángulo en función de α. Por ejemplo, calcule el área para $\alpha = \pi/4, \pi/2, 3\,\pi/4, \pi$.

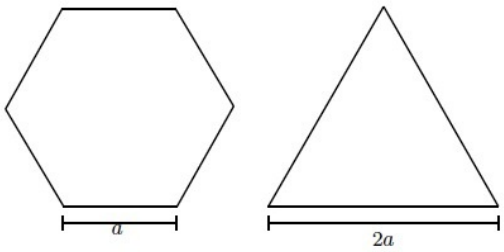


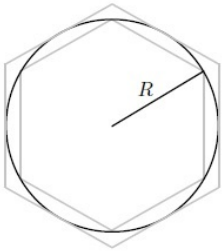


b.- Encuentre el valor del ángulo central del triángulo isósceles OAB, cuyo vértice es el centro de la circunferencia y que tiene la misma área q.ue el sector circular cuyo ángulo central es α. Note que esto no es posible para valores arbitrarios del ángulo α. Para darse cuenta de ello basta pensar el caso $\alpha = \pi$.

c.- Determine el máximo valor de α (en radianes) para el cual el triángulo isósceles descrito existe.

5.- Si un hexágono regular y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro, determine la razón entre sus áreas.

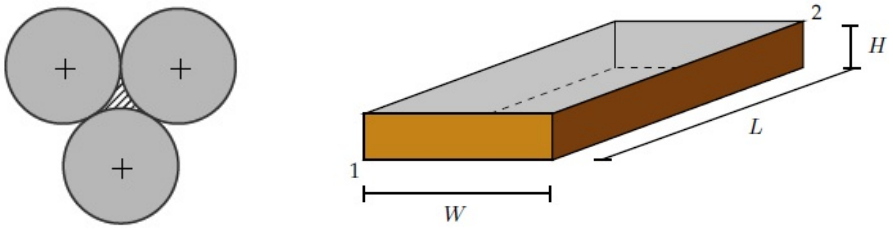




6.- Dado un círculo de radio R, determine el área del hexágono regular circunscrito y el área del hexágono regular inscrito. Compare con el área de la circunferencia. Calcule estas áreas cuando el polígono regular (inscrito y circunscrito) tiene $n = 12, 24,$ muchos ladosÉ

7.- Tres círculos de igual radio R se colocan tangentes entre sí como muestra la figura. Calcule el área achurada que se forma en el centro.

8.- Un caracol requiere movilizarse en el menor tiempo posible desde el vértice 1 (inferior izquierdo) hasta el vértice 2 (superior derecho) de la caja rectangular de la figura. Los lados de esta caja son $L > W > H$. Como la rapidez (o lentitud) del caracol es constante, para minimizar su tiempo de viaje debe utilizar la trayectoria más corta entre estos dos puntos. Encuentre la trayectoria que debe seguir el caracol.



9.- Suponga que la Tierra es una esfera perfecta de radio 6390 [km] y que sobre el Ecuador se tiende una cinta que la rodea. Suponga que alguien desea levantar esta cinta de manera que una persona de 2 m de alto pueda pasar justo bajo ella en cualquier lugar del Ecuador.

a.- ¿En cuántos metros debe aumentarse el largo de la cinta?

b.- Muestre que en el caso de una circunferencia y un triángulo se cumple que el área extra que se añade es

$$\text{Área adicional } = \mathbf{P}\,\mathbf{h} + \pi h^2$$

donde P es el perímetro de la figura. Este resultado es válido para cualquier figura cóncava cuyo contorno se extiende en un valor h.

10.- Suponga que, producto de la buena comida consumida en las fiestas de fin de año, debe acomodar su cinturón en el siguiente agujero. Calcule la superficie de tejido adiposo que agregó a su cuerpo a la altura de su cinturón.
Indicación: Para hacer este cálculo puede modelar su cintura como una circunferencia de perímetro **P**: la longitud medida desde uno de los extremos de su cinturón a la posición en que abrochaba su cinturón antes de las Fiestas. Puede suponer que el ancho del cinturón es **W** y que la distancia entre los agujeros es **d**.

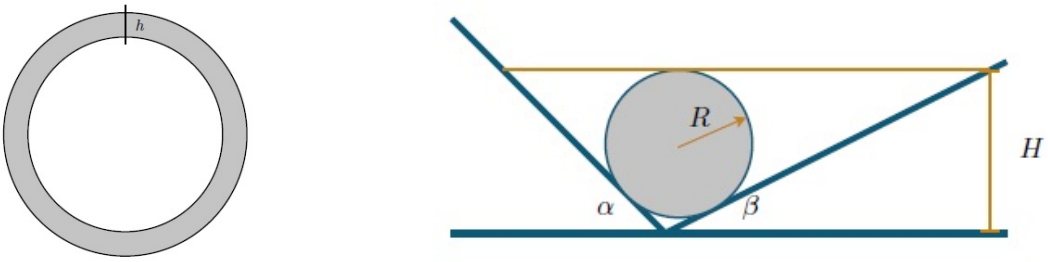


Figura I.21:

11.- Un cilindro de radio **R** se ubica sobre una canaleta caracterizada por los ángulos α y β señalados en la Figura.

Suponiendo que el cilindro no se despega del fondo de la canaleta, determine el nivel necesario de agua **H** para que permanezca completamente sumergida. Verifique su resultado para el caso $\alpha = \beta$. ¿Cambia la solución si usamos una esfera en lugar de un cilindro?

12.- Considere un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice es 120^o. Se inscribe una circunferencia de radio **R** en el interior de este triángulo. Calcule la altura de este triángulo en función del radio **R** dado. ¿Es posible formar un triángulo equilátero con tres de estas baldosas? ¿Es posible formar un cuadrado teniendo estas baldosas como unidades base?

13.- Una barra muy delgada de largo **L** cuelga del techo sostenida de sus extremos por sendos hilos de largo **d**. Los hilos caen perpendicularmente a la barra.

a.- Calcule la altura **h** que se eleva la barra al hacerla girar en 90° .

b.- Usando materiales a su alcance, compruebe experimentalmente su resultado. ¿Qué condición debe cumplir **d** para que esta operación se pueda realizar?

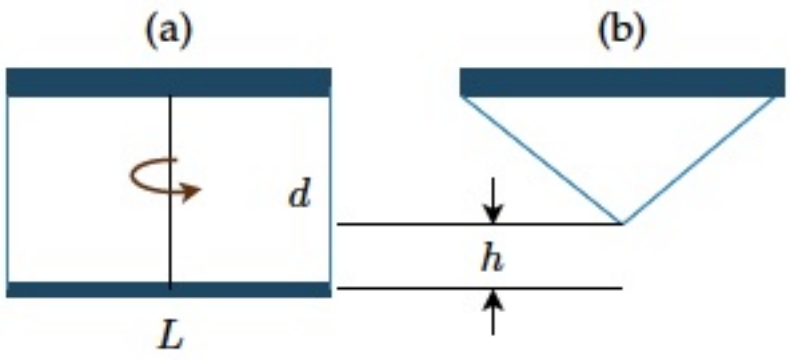
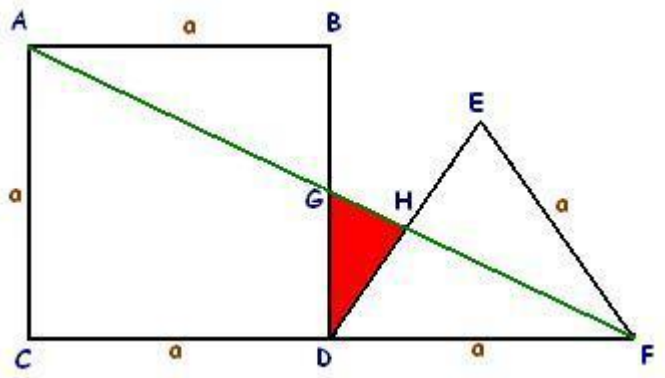
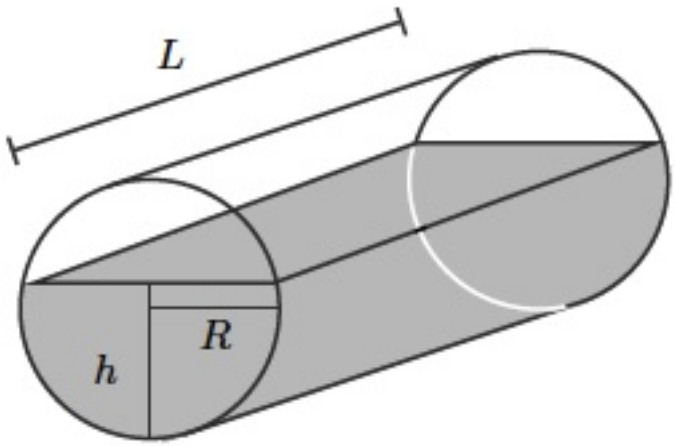


Figura I.22:

14.- Se tiene el cuadrado □**ABCD** de la figura junto con un triángulo equilátero △DEF, ambos de lado **a**. Se traza la diagonal **AF**, calcule el área del triángulo △ GDH.



15.- Un cilindro recostado de radio R y largo L contiene líquido hasta una altura h como indica la figura. Calcule la nueva altura del líquido cuando el cilindro se coloca en posición vertical.



16.- Se tiene un conjunto de n cilindros de radio R alineados sobre una superficie plana y tocándose con sus vecinos. Los cilindros no pueden moverse. Utilizaremos una cuerda inextensible de largo L para colgar una masa m de uno de sus extremos, mientras el otro está conectado a una superficie vertical en un punto de altura $2R$ con respecto a la superficie horizontal, tal como lo indica la figura.

Ahora suponga que usted instala $(n-1)$ cilindros idénticos sobre la base formada por los n cilindros, tal como se muestra en la figura. ¿Cuánto sube el extremo de la cuerda que tiene la masa m con respecto a la situación inicial?

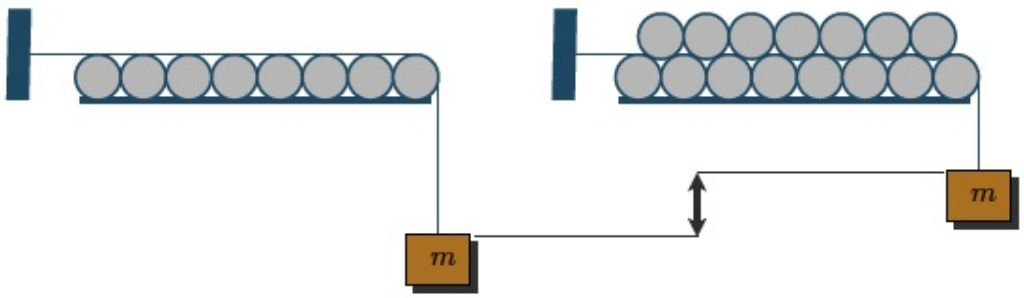
Indicación: Ud. puede resolver el problema como más le acomode, pero incluimos algunas indicaciones que pueden ser útiles:

a.- Resuelva primero el caso con tres cilindros solamente: uno arriba y dos abajo. Con este resultado aborde el problema de **n** ó **(n-1)** cilindros.

b.- La cuerda no tiene espesor y va pegada a los cilindros en la zona ocupada por ellos.

c.- El orden es como sigue: la cuerda llega horizontal y tangente al primer cilindro (el de más a la izquierda), después sigue el arco de ese cilindro hasta el punto de contacto con el cilindro superior, desde allí se pega al superior hasta el siguiente punto de contacto con el inferior y así sucesivamente.

d.- Debe evaluar el arco de circunferencia en cada caso para determinar el camino recorrido por la cuerda.



17.- a.- Determine el ángulo α que subtiende la barra de largo **L**, que permanece en reposo en el interior del cilindro de radio **R** de la figura.

b.- ¿A qué altura se ubica el punto medio de la barra **L**, medido a partir del piso? Dé su respuesta en función del ángulo θ, que suponemos conocido.

c.- Cuál es la relación entre el ángulo θ y α cuando la barra permanece horizontal?

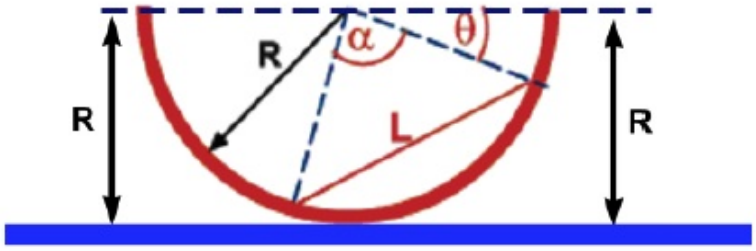


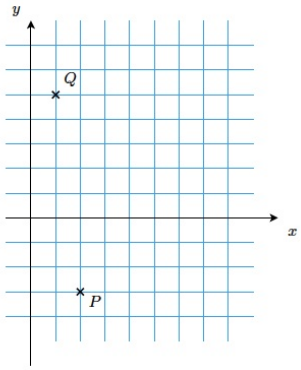
Figura I.23:

18.- Dados dos puntos P (2,-3) y Q (1, 5), en el sistema cartesiano (x, y):

a.- Encuentre la distancia entre ellos.

b.- Encuentre la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos e indique el valor de su pendiente.

c.- Escriba la ecuación de una recta perpendicular a PQ y que pasa por el origen.



19.- Para calcular el ancho de un río, se mide una distancia, AB (ver Figura), a lo largo de su orilla, tomando el punto A directamente opuesto a un árbol C, ubicado en la otra ribera. Si el ángulo $\angle(A\,B\,C)$ es de $55°$ y la distancia AB de 10 m, ¿cuál es el ancho del río?

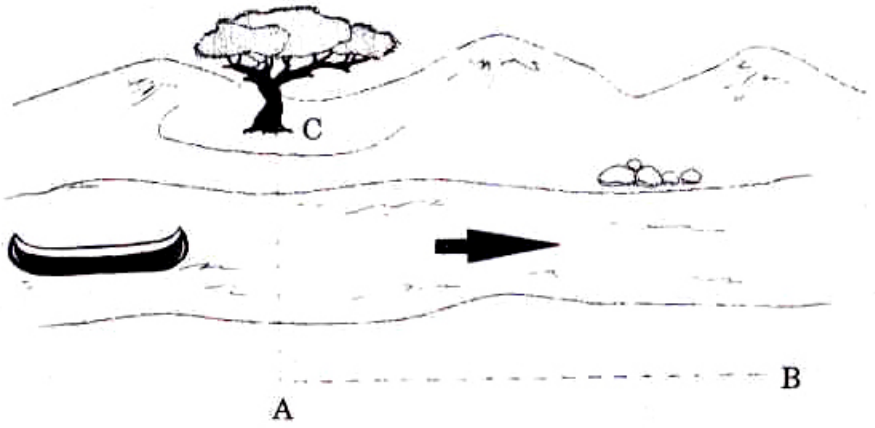


Figura I.24:

20.- El mástil de un gran navío tiene una altura de 30 m sobre el nivel del mar. Lejos de allí, un pescador en su bote, ve el mástil con un ángulo de $5°$ sobre la horizontal. Si el ángulo está en un plano vertical: ¿a qué distancia se encuentra el bote?

(Desprecie la altura del bote y del pescador que está sentado en él.)

21.- Al observar dos torres desde el *punto medio* de la distancia que las separa, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son $30°$ y $60°$ respectivamente. Demostrar que la altura de una de las torres alcanza el triple del valor de la altura de la otra.

22.- Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una llanura encuentra que, desde un cierto lugar, el fuerte se ve bajo un ángulo de $10°$, y desde otro punto, 200 m más cerca del fuerte, se ve bajo un ángulo de $15°$ ¿Cuál es la altura del fuerte y cuál es su distancia al segundo lugar de observación?

La Figura (I.25) ayuda a visualizar la situación.)

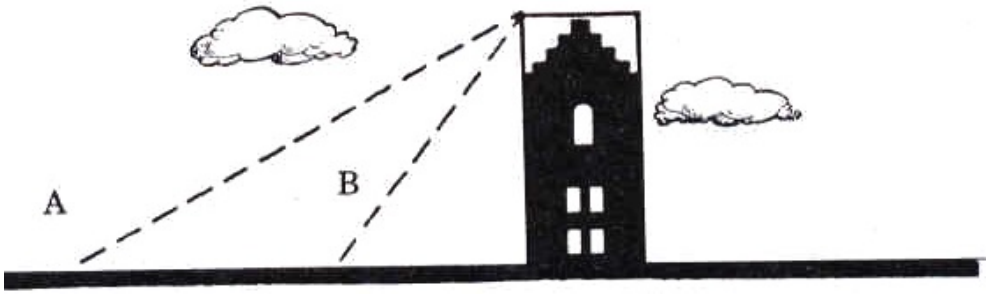


Figura I.25:

23.- Con el fin de conocer la altura, **h** de un objeto, se ha medido la distancia entre dos puntos, **A** y **B**, a lo largo de una recta que pasa por su base en un plano horizontal y resultó ser ℓ metros. Los ángulos de elevación de la punta del objeto desde A y B resultaron ser α y β respectivamente, siendo **A** el punto más cercano a la base. Ver Figura (I.25). Demostrar que la altura está dada por la fórmula:

$$h = \frac{\ell}{\cot\,\beta - \cot\,\alpha}, \qquad \text{si A y B están del mismo lado, y por:}$$

$$h = \frac{\ell}{\cot\,\beta + \cot\,\alpha}, \qquad \text{si A y B están en lados opuestos de la base del objeto.}$$

24.- La persona de la Figura (I.26), observa dos montes con ángulos de elevación α y β respectivamente.

Si el de la izquierda tiene una altura **h** y la separación entre ambos es **D**, calcule la altura del monte opuesto.

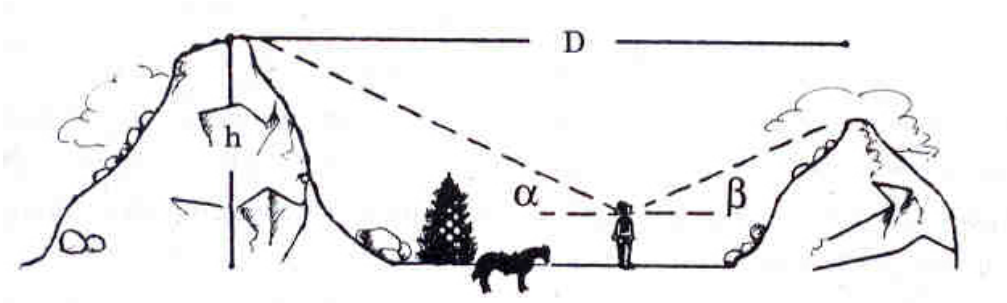
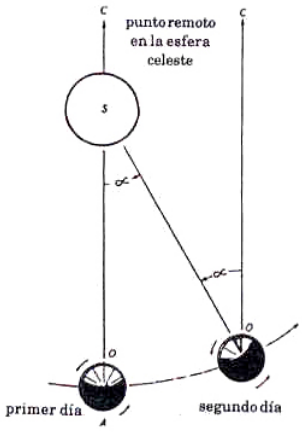


Figura I.26:

25.- En esta Figura se puede apreciar la diferencia entre un día *sideral* y uno *solar*.

Para hacer la explicación más simple, supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. En realidad las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos las observan durante el día.
Para un observador en el Ecuador, el día solar es el intervalo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el cenit (posición del Sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral es el tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos de una *estrella lejana* por el cenit.



La diferencia que existe entre ambas definiciones se debe al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol como se indica en la Figura que se acompaña.

Este desplazamiento no cambia la posición de la estrella lejana –precisamente por estar tan lejana–, pero la posición del Sol en el cenit ocurre antes que la Tierra alcance a dar una vuelta completa alrededor de su propio eje.

Determinar el valor del ángulo α definido en la Figura. Calcule la diferencia, expresada en segundos, entre el día sideral y el día solar.

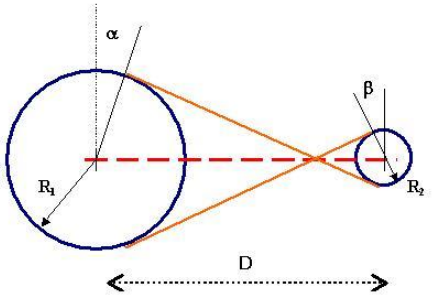


Figura I.27:

26.- Los dos discos de la figura están separados (centro a centro) por una distancia **D**. Los radios de cada uno son R_1 y R_2, con uno mayor que el otro.
a.- Encuentre el largo de la polea que une ambos discos. (Este tipo de unión permite que los discos giren en sentidos opuestos, en caso que exista rotación).
b.- Calcule el ángulo α y β que señala el arco que va desde el punto donde la cuerda toca al disco hasta la vertical señalada en la figura. Los resultados deben quedar en función de los datos conocidos.

27.- Desde un punto **D**, una persona puede observar una estatua con su pedestal en forma completa.

Conoce su altura y la del pedestal, que son 6 y 4 m, respectivamente.

El ángulo de elevación de la cabeza de la estatua con respecto al piso es el doble del ángulo que subtiende el pedestal.

A partir de estos datos, calcule a qué distancia se encuentra este observador.

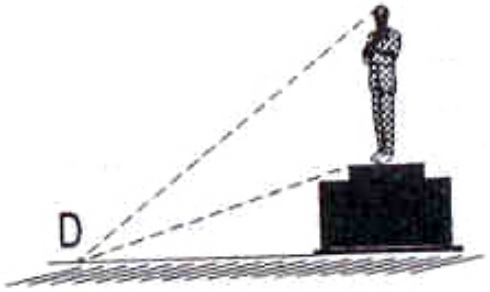


Figura I.28:

28.- Al incidir un rayo de luz sobre una superficie que separa dos medios diferentes, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta sufre un cambio de dirección (ver Figura). Este fenómeno se conoce con el nombre de refracción de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la Ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}}$$

donde v_{aire} y v_{vidrio}, corresponden a la velocidad de la luz en el aire y en el vidrio respectivamente. (Para el vidrio común se acepta el valor $v_{\text{aire}}/v_{\text{ vidrio}} \simeq 1{,}5$).

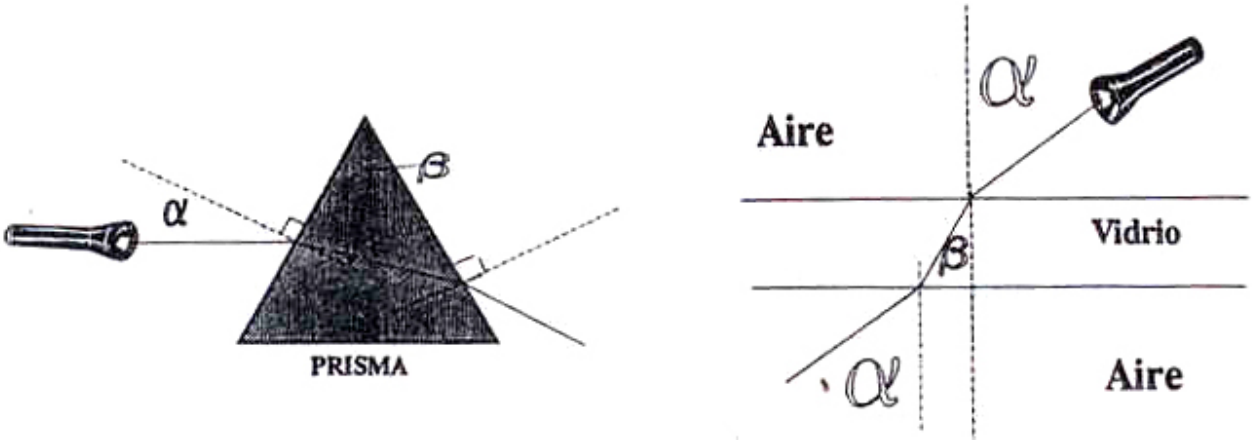


Figura I.29:

Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de caras paralelas y de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia dada α y de refracción β. Demuestre que el rayo de luz que emerge por la otra cara se encuentra siempre paralelamente desplazado respecto al incidente. (Ver Figura).

29.- Considere ahora un rayo de luz incidiendo sobre un prisma en la forma como se muestra en la Figura. Encuentre el ángulo β para $\alpha = 20°,\ 40°,\ 50°$ y $70°$.

¿Para qué valor del ángulo incidente α, el rayo de luz se propaga paralelamente a la cara interior del lado opuesto al de incidencia del prisma?

Para valores de α mayores, el haz de luz es reflejado especularmente en la superficie interior del prisma. Este fenómeno se conoce con el nombre de *reflexión total*.

30.- **Medición del tamaño de la Tierra.**

Los antiguos reconocieron la esfericidad de la Tierra a través de diversas observaciones:

a) En los eclipses de Luna la sombra de la Tierra sobre la superficie lunar es redonda.

b) La elevación de una estrella sobre el horizonte varía con la latitud.

c) Los barcos se pierden rápidamente de vista desapareciendo bajo el horizonte al alejarse.

Uno de los primeros valores para el perímetro del globo terráqueo fue obtenido por Eratóstenes (~ 330 A. de C.).

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de Junio el Sol caía verticalmente en Siena (actualmente Asuán): la luz solar que incidía sobre un profundo pozo se reflejaba en el fondo hacia arriba. (Ver Figura). El mismo día, a la misma hora, se midió en Alejandría la sombra de un alto obelisco. Eratóstenes encontró que los rayos del Sol formaban un ángulo de $7,5°$ con la vertical.

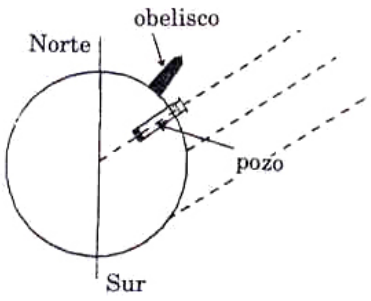


Figura I.30: *El valor obtenido por Eratóstenes no resultó ser el correcto debido a la imprecisión en la medida de las distancias.*

Sabiendo que Alejandría se encuentra a algo más de 800 Km. al Norte de Siena, estime el valor del perímetro y radio terrestres.

31.- Demuestre que si dos cuerdas en un círculo se interceptan en ángulos rectos, entonces la suma de los cuadrados de los largos de los cuatro segmentos formados es una constante y el valor de esta constante es el cuadrado del diámetro: $4\,R^2 \;=\; a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Ref.: **Stephen Barr**; 2nd Miscellany of Puzzles, New York, 1969 (Dover Publ. Mathematical Brain Benders, 2nd Miscellany of Puzzles, 1982) - problem 9: The Pot on the Crosspieces.

Rob Johnson; http://www.whim.org/nebula/math/images/perpchord.gif
Una prueba corta se basa en el siguiente resultado: cuando se tienen dos cuerdas que se interceptan, los arcos opuestos formados en la circunferencia suman el doble del ángulo formado por las dos cuerdas. En nuestro caso, dado que las cuerdas son perpendiculares ($\pi/2$), tenemos que los dos arcos opuestos suman π (son suplementarios entre ellos). Desplazando estos arcos junto con las cuerdas de manera que el punto de intercepción se ubique en la circunferencia, podemos apreciar que entonces forman un triángulo rectángulo con el diámetro de la circunferencia como la hipotenusa.

Roger B. Nelsen;
Four Squares with Constant Area, **Mathematics Magazine**. 77:2 (April 2004) 135 Ver esta revista para tener una prueba sin palabras (sólo usa el dibujo para insinuarla).
(Estas indicaciones son gentileza del Profesor Andrés Meza.)

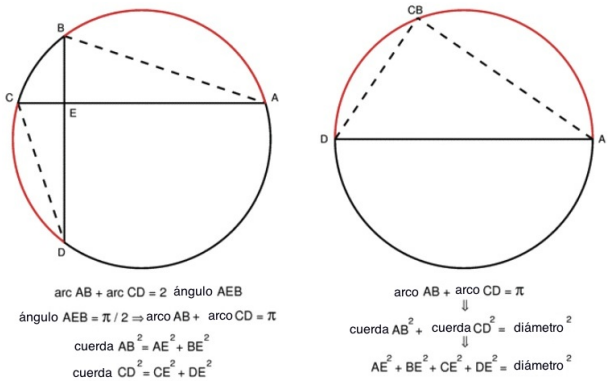

B
C
A
E
D
arc AB + arc CD = 2 ángulo AEB
ángulo AEB = π / 2 ⇒ arco AB + arco CD = π
cuerda AB² = AE² + BE²
cuerda CD² = CE² + DE²
CB
D
A
arco AB + arco CD = π
⇓
cuerda AB² + cuerda CD² = diámetro²
⇓
AE² + BE² + CE² + DE² = diámetro²

Figura I.31: *Prueba sin palabras de la cuerdas perpendiculares.*

32.- **Problema Desafío!** Resolver usando sólo geometría.

Divida una pizza de la siguiente forma: Toma un punto **P** arbitrario al interior de la pizza, que no sea el centro de ella. A partir de dicho punto **P**, traza una cuerda arbitraria, que no sea, por ejemplo, perpendicular a la recta que une **P** con el centro de la pizza. Por el mismo punto traza otra cuerda perpendicular a la anterior. Con este procedimiento ya tiene cuatro pedazos

de pizza. Finalmente, bisecta los ángulos rectos que se han formado, mediante dos cuerdas, que son necesariamente, perpendiculares entre sí.
Demuestre que la persona que elige las partes sombreadas, (las que no son adyacentes) come exactamente lo mismo que su compañero que consume las partes sin sombrear.

Figura I.32:

33.- **Problema Desafío!**

Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico (un triángulo dibujado sobre una esfera de radio **R**) tiene el valor:

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i - \pi \; = \; \frac{Area}{R^2},$$

Donde θ_i es cada uno de los ángulos interiores del triángulo esférico de la figura, **R**, el radio de la esfera y el área es el área encerrada por el triángulo.

Calcule primero el área generada por una tajada con un ángulo θ. Puede usar la proporcionalidad entre el ángulo θ y $2\,\pi$. Ver dibujo de la izquierda .

Con ese resultado, y considerando que el triángulo esférico genera tres círculos máximos, como se puede apreciar en el dibujo a la derecha de la figura, concluya (y calcule el resultado pedido) que el área que generan las tajadas, al tomarlas de a pares desde cada vértice del triángulo, cubren una vez la esfera y tres veces los dos triángulos (el superior y el reflejo en las antípodas). Con esto puede llegar al resultado pedido.

¿Qué ocurre si R $\mapsto \infty$?

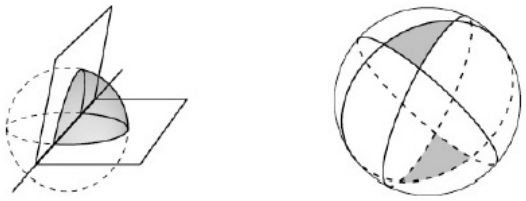


Figura I.33:

I.8. Bibliografía

1. La mayoría de los libros de Introducción al Cálculo contienen lo básico de geometría y trigonometría.

2. Un libro de libre acceso se puede encontrar en: press.princeton.edu/books/maor/ qquad Ver el capítulo 6: *Two Theorems from geometry*. Estudia casos simples de geometría.

3. **Selected Chapters of Geometry**. Buscar bajo este título en google. En el capítulo **I** aparece una discusión acerca de uno de los problemas desafío propuesto.

4. www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/fun2/fun2.html#graphenwf
Contiene gráficos de funciones trigonométricas con ejercicios interesantes.

5. **The shape of space**, Jeffrey E. Weeks, Marcel Dekker, Inc. new York, 2002. Contiene diversos tópicos acerca de la geometría. Es una lectura adicional y entretenida. Está en la Biblioteca del Departamento de Física y de la Biblioteca Central.

Ejemplo Resuelto

Un cilindro se ubica en el interior de una canaleta, como se indica en la figura adjunta. Encontrar el nivel de agua medido desde el vértice de la canaleta para que alcance a cubrir el cilindro. ¿Cómo cambia este problema si en lugar de un cilindro se coloca una esfera del mismo radio?

Solución

Los datos del problema son los dos ángulos α, β y el radio **R** del cilindro.
Además el centro **O** de la circunferencia inscrita es el punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo (ver I.13).

De la Figura se desprende que

$$\sin\,\beta = \frac{H}{|AB|} \;=\; \frac{\mathbf{H}}{(\mathbf{x}\,+\,\mathbf{y})},\;\; \text{pero}\;\; \tan(\beta/2) \;=\; \frac{R}{\mathbf{x}} \;\;\Rightarrow \mathbf{x} \;=\; \frac{R}{\tan\beta/2}.$$

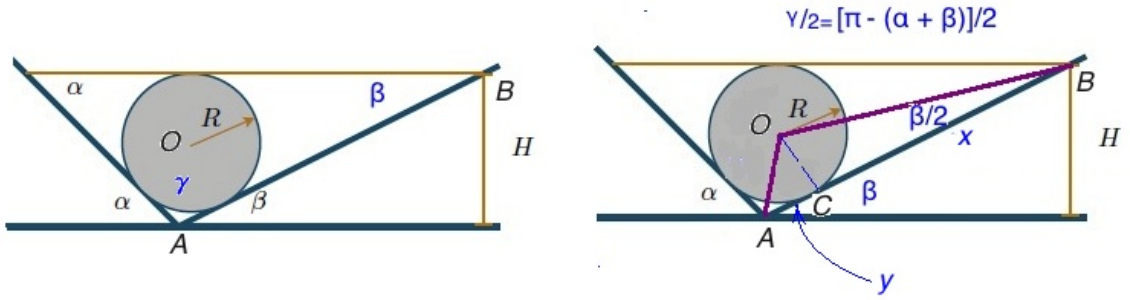


Figura I.34: *Este problema está propuesto en la lista de ejercicios.*

Por otra parte $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Entonces

$$\tan\left[\pi - (\alpha + \beta)\right]/2 = \frac{R}{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{y} = \frac{R}{\tan[\pi - (\alpha + \beta)]/2}.$$

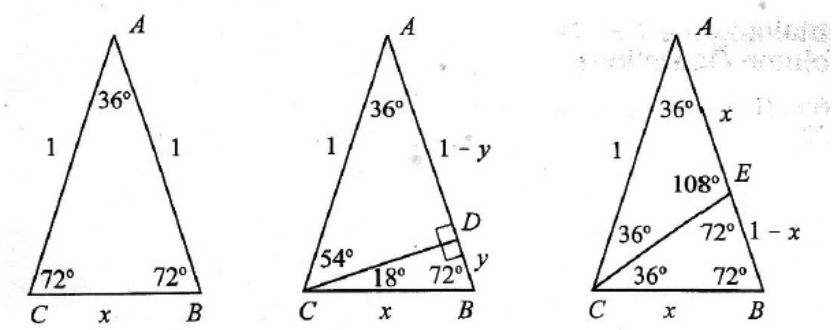
De esta forma

$$\mathbf{H} = \sin\beta\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sin\beta \cdot \left[\frac{R}{\tan\beta/2} + \frac{R}{\tan[\pi - (\alpha + \beta)]/2}\right].$$

$$\mathbf{H} = R\sin\beta\left[\frac{1}{\tan\beta/2} + \frac{1}{\tan[\pi - (\alpha + \beta)]/2}\right].$$

□

Ejemplo Resuelto



A partir de los datos y la geometría del triángulo isósceles de la figura, calcule:
$\cos 18^o$, $\cos 36^o$, $\cos 54^o$, $\cos 72^o$, y las funciones seno de los mismos ángulos señalados.
NO DEBE USAR TABLAS, SOLO GEOMETRÍA.
Antes de empezar a calcular escriba (en tres líneas!) el procedimiento que usará. Por ejemplo, qué calculará primero y porque y cómo desde ese cálculo obtendrá los resultados pedidos.

(Referencia: The College Mathematical Journal, Vol.33, N$\frac{1}{4}$4, Sept. 2002)

Solución

A partir de los triángulos semejantes $\triangle CBE \sim \triangle ACB$ con vértice en **C** el primero y con vértice **A** el segundo, se obtiene el siguiente valor para **x**

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(ver apuntes Cap. I)}$$

Si trazamos la altura CD desde el vértice C (triángulo ubicado al centro de la figura) y definimos $BD \equiv y$ entonces, usando el teorema de Pitágoras, tenemos,

$$\overline{CD}^2 = x^2 - y^2 \qquad \text{(figura ubicada al centro.)}$$

Por otra parte, utilizando el triángulo rectángulo $\triangle ADC$ y el teorema de Pitágoras,

$$\overline{CD}^2 = 1 - (1-y)^2 = 2y - y^2$$

Igualando ambas cantidades obtenemos

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

De aquí se obtienen la magnitud de todos los lados que se necesitan para definir los seno y cosenos

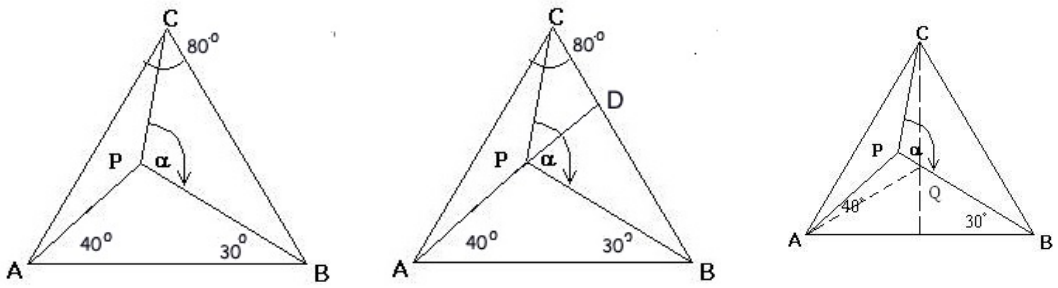
$$\overline{AD} = 1 - \frac{1}{2}x^2, \;\; \overline{BD} = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad \overline{CD} = x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}.$$

Las expresiones buscadas son

$$\cos 18^o = sen72^o = \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 36^o \;=\; \sin 54^o \;=\; 1 - \frac{1}{2}\,x^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 54^o = sen36^o = x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$



$$\cos 72^o = sen18^o = \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \qquad \square$$

Ejemplo Resuelto

En el triángulo isósceles (|**AC**| = |**CB**| = 1, figura izquierda I.8) el valor del ángulo en el vértice **C** es de 80^o. A partir del vértice **A** se traza una recta que forma un ángulo de 40^o con la base del triángulo. Lo mismo a partir de **B**, pero con un ángulo de 30^o. Desde A el punto de intersección **P**, de estas dos rectas, se traza una recta hasta el vértice **C**.
Encuentre el valor del ángulo α formado en el vértice **P**, que aparece en la figura (I.8).
NOTA: los ángulos no están dibujados a escala.

Solución

Prolongar el segmento , |**AP**| hasta alcanzar el lado , |**BC**| del triángulo parece buena idea (ver Figura del centro I.8). Se forma un triángulo rectángulo y a partir de esa figura se pueden conocer los valores de varios ángulos. Sin embargo no se logra determinar el valor de la división en los ángulos del vértice **C** generada por el segmento |**CP**|, de forma que no parece ser útil para determinar el ángulo α.

Si dibujamos un ángulo de 30^o a partir de la base |**AB**| podemos construir un triángulo isósceles al determinar el punto **Q** con la intersección del segmento |**BP**|, que coincide con la altura levantada desde el vértice **C**. [1]

Al insertar este segmento, surgen varias igualdades que serán relevantes en la resolución del problema. Se puede demostrar -haciendo el álgebra de los ángulos interiores de un triángulo- que |**AP**| es la bisectriz del ángulo asociado al vértice **A** y que |**BP**| es bisectriz del ángulo $\angle$ |**AQC**|. Estas dos bisectrices se cortan en el punto **P**.

[1] Esta aproximación fue propuesta por el alumno Mario Ahumada Durán.

Como hemos demostrado que todas las bisectrices de un triángulo cualquiera -en este caso el $\triangle$ **AQC**-, se cortan en un solo punto -**P**, en este caso-, la bisectriz trazada desde el vértice **C** DEBE pasar por **P**. La recta $|\mathbf{CP}|$ es la bisectriz del ángulo $\angle$ **QCA** y por tanto $|\mathbf{CP}|$ es la bisectriz del ángulo $\angle$ **QCB**. Con esto hemos determinado el valor del ángulo $\angle\mathbf{QCP} = 20^o$.

Considerando la suma de los ángulos internos del $\triangle\mathbf{QCP}$, tenemos

$$20^o + \alpha + 60^o = 180^o \qquad \alpha = 100^o.$$

Note que esta resolución depende exclusivamente de la elección del punto**P**. Si los valores de los ángulos dados (30^0 y 40^o) cambia, no se cumple la relación para las bisectrices del $\triangle$ **AQC** que permitió encontrar analíticamente el valor de α. Otros casos especiales ocurren cuando mantenemos el ángulo de 30^o fijo y desplazamos el punto **P** a lo largo de la recta prolongada de **BQ** hasta coindir con **Q**, o lo alejamos de **Q** hasta coincidir con el lado **AC** del triángulo. Encuentre cuánto vale α en estos dos casos.
□

Capítulo II

COMPLEMENTO MATEMATICO: Series y Aproximaciones.

II.1. SERIES VÍA EJEMPLOS

La idea de este Capítulo es mostrar cómo se opera con algunas series que son importantes en los procesos de aproximaciones que surgen al resolver algunos problemas.

II.1.1. Sucesiones

(**Ref.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica**, G. Thomas, Cap. XVI, o cualquier libro de Cálculo).

Una *sucesión* es un conjunto de símbolos

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...$$

que están en correspondencia biunívoca (es decir $1 \leftrightarrow 1$, se corresponden uno a uno) con la sucesión ordenada de los números naturales. Los símbolos $a_1, a_2, ...$ se denominan términos de la sucesión, de forma que el término *enésimo* es a_n, y se designa con la notación $\{a_n\}$.

Ejemplo

El término genérico $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, designa la sucesión

$$a_1 = 1,\, a_2 = 1/2,\, a_3 = 1/3,\, ...\, 1/4, ...\, \{1/n\}\, ...$$

El término genérico $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, designa la sucesión

$$a_1 = 1,\, a_2 = 1/2,\, ...\, 1/4,\ 1/8, ...\, \{1/2^{n-1}\}\, , ...\square$$

¿Qué sucede si n crece indefinidamente? ¿Cuál es el valor de a_n en dicho caso?

Nos interesan los casos en los cuales el valor de a$_n$ es finito o cero. Existe una definición precisa de este límite ($\lim_{n\to\infty} a_n = L.$) pero no lo estudiaremos acá.

II.1.2. Ejemplos de Series

Para definir formalmente las series, utilizamos nuestra definición de sucesión.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3, ...a_n, ...$ es una *sucesión* cualquiera de números o funciones, entonces mediante el símbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

representaremos una sucesión deducida a partir de la primera y que llamaremos *serie*. (Sólo se diferencia de la definición utilizada en los primeros ejemplos en el número de elementos de la suma. Era finito en el primer caso y ahora es más general, puede ser infinito.)

Definimos S_n como las sumas parciales la sucesión hasta el término enésimo.

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n. \end{aligned}$$

El término enésimo de la sucesión S_n es la suma de los n primeros términos de la serie $\{a_n\}$.

Si esta sucesión posee un límite cuando **n** crece indefinidamente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{II.1}$$

S es el valor de la secuencia S_n *cuando* $n \to \infty$. También podemos decir que la serie $\{S_n\}$ *converge* a S.

Si por el contrario la serie $\{S_n\}$ diverge, es decir, cada uno de las sumas parciales aumenta su valor continuamenten a medida que n crece, entonces definimos la serie $\{S_n\}$ como una serie divergente.

En este libro sólo nos interesan las series convergentes, puesto que son las únicas a las cuales les podemos asignar un significado concreto (un número).

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de series, tanto finitas como infinitas.

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{3}(2^n) \equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14,$$

$$\sum_{n=1}^{3}(1) \equiv 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a^k) \equiv a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n,$$

$$\sum_{k=4}^{6}(a^k) \equiv a^4 + a^5 + a^6, \qquad \text{donde a es un número arbitrario.}$$

Definición:

sigma $\equiv \sum$ indica que el sumando ($[a^k]$ en el último ejemplo) toma cada uno de los valores que recorre **k**, partiendo desde el límite inferior hasta el superior, a través de los enteros.

El límite superior en los dos primeros ejemplos es 3 y en el tercero no se deja explícito, n puede tomar cualquier valor entero. k lleva la contabilidad de los términos incluidos en la suma (va desde $k = 1$ hasta $k = n$, con n un número entero).

Es fácil demostrar la siguiente propiedad de las sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{k=n} C\, a_k = C \sum_{k=1}^{k=n} a_k, \tag{II.2}$$

donde C es una constante que no depende de k. Basta recordar la sociatividad de los números reales: $C\, a_1 + C\, a_2 + C\, a_3 = C\,\{a_1 + a_2 + a_3\}$.

Ejemplo

Demuestre la igualdad entre las dos sumatorias indicadas:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n}(i)^3.$$

Solución

A continuación se incluye una demostración ingeniosa que usa un arreglo ordenado de los números (ver Figura) para demostrar la igualdad. La idea consiste en sumar los números de cada uno de los arreglos pero agrupados en forma diferente, de manera que reflejen a cada una de las sumatorias propuestas. Esto se señala claramente en la Figura.

Los números se suman de acuerdo a la caja que los contiene (rectangular o formando un ángulo recto). El valor de la suma de cada una de las cajas se indica al pie de la misma Figura.

En el caso del arreglo ubicado a mano izquierda, se ha sacado –usando la regla de factorización recién descrita– un factor común en cada una de las sumatorias individuales, que corresponde

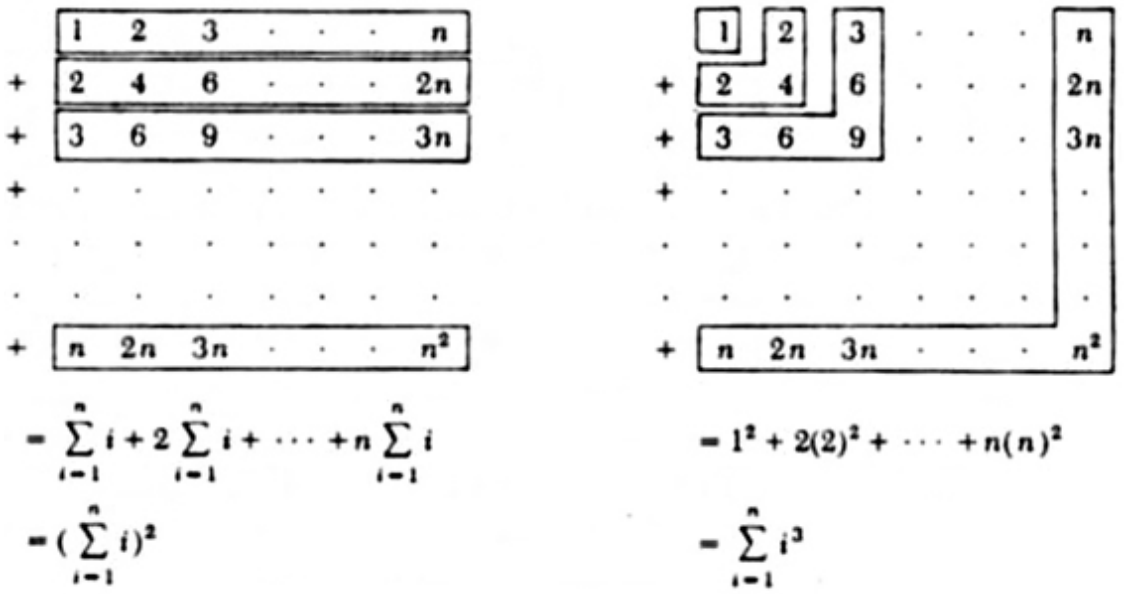


Figura II.1: (The College Mathematics Journal, Vol. 62, # 5, Dec. 89.)

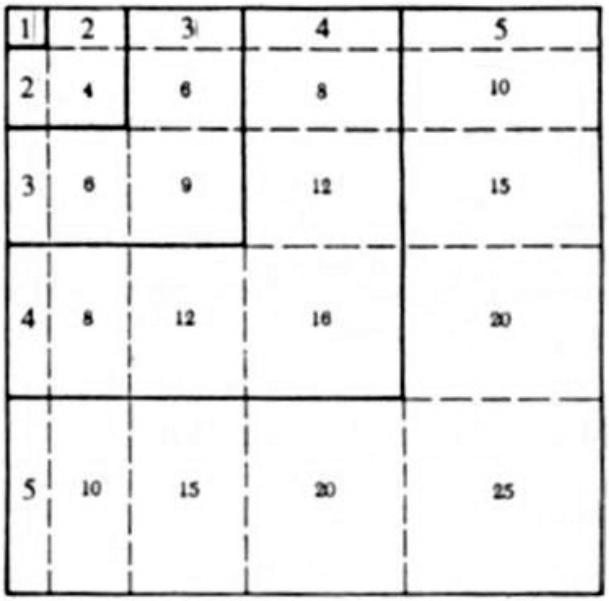
al número 2, 3, 4...n, de acuerdo a la posición del rectángulo horizontal. En seguida, se saca la sumatoria de i como factor común, como se indica a continuación

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)+3\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)+...+n\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)=\left\{\sum_{i=1}^{i=n}(i)\right\}[1+2+3+...+n]=\left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$$

Con esto calculamos el bloque de la izquierda.

Dejamos como ejercicio comprobar que los términos al pie del bloque de la derecha de la Figura corresponden a la suma de los números encerrados dentro de cada uno de los cajas en forma de ángulo recto.

Otra forma similar de visualizar la suma $\left[\sum_{i=1}^{i=n} i\right]^2$ consiste en agrupar los términos de forma que corresponde al *área de un terreno cuadrado* que tiene $\sum_{i=1}^{i=n} i$. Se dibuja el terreno a escala (la longitud 5, por ejemplo, tiene cinco unidades de largo) y se calcula el área en forma diferente. El número indicado dentro del cuadrado (o rectángulo), corresponde al valor del área de dicha figura. El truco radica en sumar las áreas considerando franjas o figuras en **L**. En cada caso se obtiene la suma señalada anteriormente y queda claro que el área del cuadrado es la suma buscada. □



Ejemplo

Dado un número real, arbitrario q, y un número entero N, se pide encontrar el valor de la siguiente suma:

$$S = \sum_{n=0}^{N} q^n = q^\circ + q^1 + q^2 + ... + q^N$$

A partir de la expresión encontrada aquí recuperar el resultado obtenido para la serie anterior.

Podemos encontrar el valor de S multiplicando ambos lados de la sumatoria por q,

$$q \times S = S + q^{N+1} - 1,$$

despejando S de esta ecuación, tenemos

$$S = (1 - q^{N+1})/(1 - q) = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^N. \qquad \text{(II.3)}$$

Hemos encontrado el valor de S sin necesidad de sumar cada uno de los términos de la serie. Este resultado es válido para todos los valores de $q \neq 1$. Supongamos que $|q| < 1$ y hagamos crecer el valor de N indefinidamente, es decir, tomemos el valor límite de $N \to \infty$. En otras palabras, damos a N un valor muy grande, mayor que cualquier otro que uno pueda imaginar. En este caso

$$\lim_{N\to\infty} q^{N+1} = 0.$$

Este resultado adquiere sentido si uno considera el producto de un número, menor que la unidad por sí mismo. Y repite esta multiplicación tantas veces quiera. Por ejemplo, no importa lo pequeño

que sea el número (positivo) que Ud. pueda imaginar (llamémosle ϵ, para ser específico), uno siempre puede encontrar un valor de N suficientemente grande, que haga $q^{N+1} < \epsilon$. (Verifique esta afirmación con una calculadora.)

Así

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... = \frac{1}{1-q}\,, \qquad \text{(II.4)}$$

coincidiendo con lo demostrado anteriormente, usando sólo geometría.

Ejemplo

La fracción decimal periódica $0,317317317...$, representa un número *racional*.

a) Escriba este número como una suma infinita de términos.

b) Siendo un número racional, es posible escribirlo de la forma p/q. Usando el resultado de la parte $a)$, encuentre el valor de p y q.

a) Primero notamos que este número, por ser una una fracción decimal periódica, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 0,317317317... &= 0,317 + 0,000317 + 0,000000317... \\ &\text{o de otra forma} \\ 0,317317317... &= 0,317 + \frac{0,317}{10^3} + \frac{0,317}{10^6}... \\ 0,317317317... &= 0,317\left\{1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + ...\right\} \\ 0,317317317... &= 0,317\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\}. \end{aligned}$$

En la última línea, usamos el resultado obtenido en [II.4]. Para poder expresarla como la razón entre dos enteros debemos escribirla de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 0,317317317... &= \frac{317}{10^3}\left\{\frac{1}{1-10^{-3}}\right\} \\ 0,317317317... &= \left\{\frac{317}{10^3-1}\right\} = 317/999.\square \end{aligned}$$

Ejemplo

Encuentre el valor de la siguiente suma para $n = 14$.

$$S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + ... + \overbrace{111111}^{\text{n–unos}}.$$

Indicación: Haga la suma de los tres primeros términos: $S_3 = 1+11+111 = 3\cdot 1+2\cdot 10+1\cdot 100$. En el caso general entonces será $S_n = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 10 + ...\Box$.

II.2. Series con Infinitos Términos

En un gran número de casos los casos la suma involucra infinitos términos, no termina nunca. En este escenario, si la serie está bien definida (es decir, el valor de su suma es finito), ocurre que al escribirla explícitamente, cada uno de los términos que se agregan – a partir de un cierto valor del índice de la suma k, los términos toman valores (absolutos) decrecientes de acuerdo a un cierto criterio bien establecido (que no mencionaremos acá) que garantiza que la serie converge a un valor finito. Este valor constituye el límite de la serie.

El concepto de serie infinita con su respectivo límite asociado, no es trivial y requiere más elaboración. El dominio de esta área no es fundamental en las materias de este libro. En general en física, uno toma sólo los primeros términos de esta serie -que debe ser convergente-, en la resolución de un problema.

Sólo utilizaremos tres o cuatro de estas series bien conocidas. Proporcionan -además-, la posibilidad de utilizar el computador para convencerse de algunos resultados cuyas demostraciones analíticas van más allá de este curso.

Una serie que utilizaremos en nuestros cálculos es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... \tag{II.5}$$

Para que esta serie converga se debe verificar que $|x| < 1$. $|x|$ indica el valor absoluto de x.

Nota

Rigurosamente se debe escribir:

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{k=n} x^k \equiv \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad \text{o} \quad S_\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k \right). \tag{II.6}$$

S_n constituye una *sucesión* de números identificadas con n. El límite de esta sucesión para $n \to \infty$ (es decir para un **n** mayor que cualquier **n** que Ud. se pueda imaginar) se obtiene al verificar que a medida que **n** aumenta la suma se aproxima a un valor fijo que no depende de **n**. Este es el valor de S_∞. Debe ser un valor finito, de otra manera, como ya se señaló, el resultado no

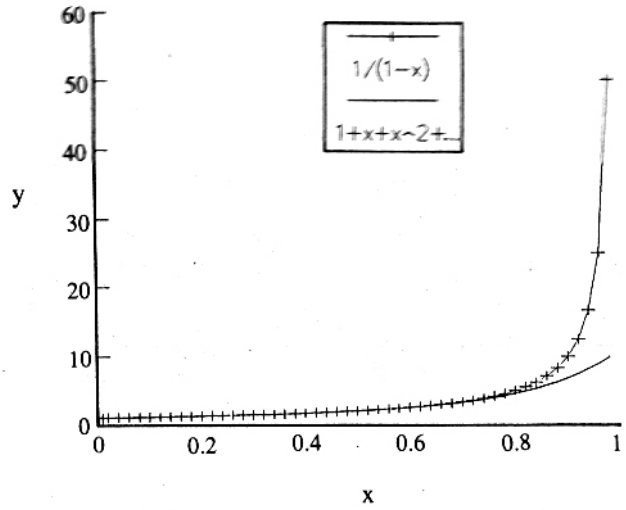


Figura II.2: *Comparación entre la función 1/(1 - x) (gráficada con +) y la aproximación polinomial, que incluye hasta potencias de orden 10 (línea continua). En la aproximación, se corta la serie infinita, manteniendo sólo los primeros términos.*

tiene ningún significado matemático. Verifiquemos que para $|x| < 1$, la serie anterior, con todos sus términos incluidos, se puede escribir en forma analítica:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = 1/(1 - x). \tag{II.7}$$

Hay muchas formas de obtener esta identidad. Podemos comprobar este resultado graficando con un computador las siguientes dos funciones (ver Figura II.2) :

$$y(x) = 1/(1 - x), \qquad \text{y}$$

$$S_{10} = 1 + x + x^2 + ... + x^{10}.$$

Ejemplo

Demostraremos esta igualdad en forma geométrica utilizando proporciones: triángulos semejantes. Usaremos el triángulo rectángulo de la Figura II.3

Se construye la siguiente estructura sobre el triángulo rectángulo: A partir del cateto más pequeño, que se toma de largo unitario (por definición, o si Ud. quiere, lo construye con dicho lado unitario) se construye un cuadrado perfecto. Con esto se genera un segmento (ver Figura) de largo r, a partir del cual se genera otro cuadrado de lado $r < 1$ como indica la Figura. Sucesivamente se construyen los cuadrados r^2, r^3... etc.

De la Figura , vemos que hay dos triángulos semejantes: $\Delta ADB \sim \Delta COA$, esto implica que

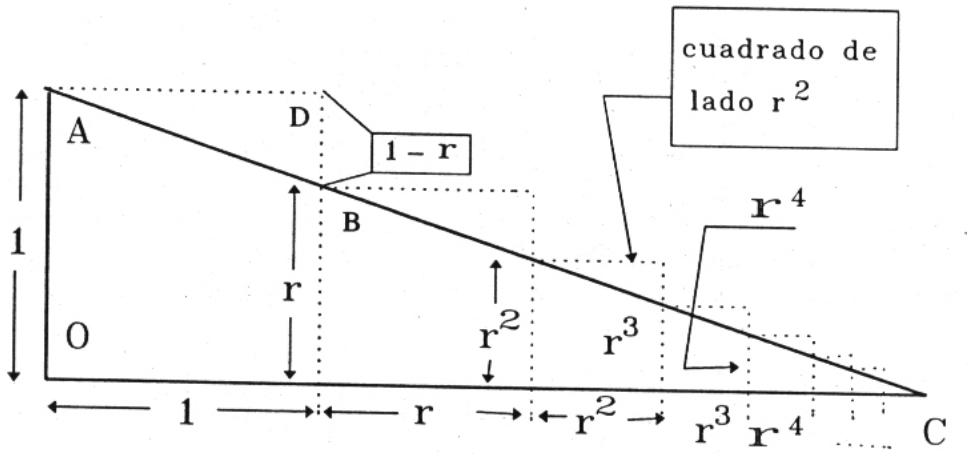


Figura II.3: *La semejanza entre el ΔOAC y el ΔADB permite demostrar la igualdad propuesta. A partir de OA, que hacemos unitario, se construye un cuadrado, este genera el segmento de longitud r, que genera otro cuadrado de longitud r^2...*

existe una proporcionalidad entre sus lados correspondientes, que se indica a continuación

$$\frac{1}{(1-r)} = \frac{(1+r+r^2+r^3+...)}{1}.$$

Con este último paso completamos la demostración.

El valor que puede tomar r (o mejor utilizar la letra x) es arbitrario salvo que $|x| < 1$.

Si r (o $|x|$) es muy pequeño con respecto a la unidad, es decir $|x| << 1$ entonces

$$\frac{1}{1-x} \simeq (1+x), \tag{II.8}$$

porque al multiplicar un número pequeño por sí mismo, se hace aún más pequeño. Comprobemos esto numéricamente: si $r = 10^{-3} = ,001$, entonces $x^2 = 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6} = ,000001$ y podemos apreciar que es realmente despreciable con respecto al primer término.

Esta última es una de las aproximaciones más frecuentes en el desarrollo de los problemas físicos.

Ejemplo

A continuación incluimos una serie con infinitos términos que es convergente y que es fácil de visualizar mediante una figura.

Ejemplo

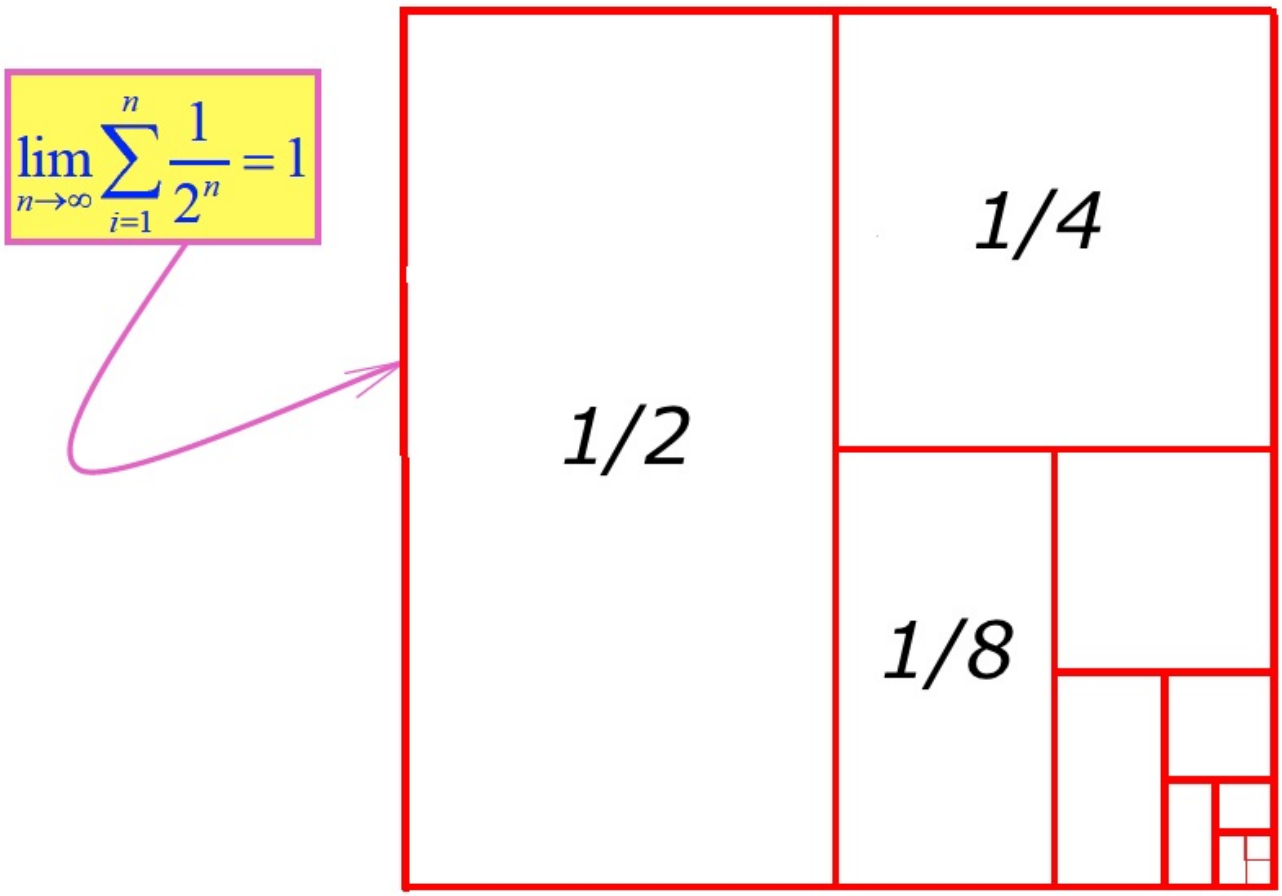


Figura II.4:

La serie que se incluye a continuación es divergente, a pesar que a simple vista, no lo parece.

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{n} \\ S &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\ldots \end{aligned}$$

Utilice un computador para encontrar el número mínimo de términos de la serie $\sum 1/n$ que debe sumar, para que su valor sea mayor que 3. (Respuesta: 11) □

II.3. Series Recurrentes en Física

II.3.1. El binomio y el número e.

Una de las series que se presenta frecuentemente, es el desarrollo de de un binomio. La potencia enésima de un binomio es:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned} \tag{II.9}$$

La expresión que aparece en esta última línea es una forma compacta para representar la fórmula del binomio y contiene la expresión $n!$ ***n factorial*** que será definida a continuación. Conviene desarrollar esta suma para los casos más conocidos como una forma de familiarizarse con su significado.

- Esta serie tiene sólo $n+1$ términos **si** n es un entero positivo. En este caso la suma termina cuando $\alpha = n$. Si n no es un entero positivo, la suma prosigue hasta infinito.
- Corresponde al desarrollo usual del cuadrado de un binomio si $n = 2$, al cubo de un binomio si $n = 3$ ...
- Al final de esta sección generalizaremos este resultado para cualquier valor de n, real, negativo... .
- $3!$, se lee: tres factorial y es una denominación para el siguiente producto:

$$\begin{aligned}3! &\equiv 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ 1! &\equiv 1, \\ 0! &\equiv 1 \text{ (por definición).}\end{aligned}$$

En general

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{II.10}$$

$n!$ es un número que crece rápidamente. Compruébelo calculando 10! en un computador.

Probablemente la serie más célebre es la siguiente:

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \tag{II.11}$$

Donde la letra **e** define, por convención, al número irracional $e = 2,71828...$ El valor de **e** se obtiene de la serie anterior si ponemos $x = 1$:

$$e^1 \equiv e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2,71828... \tag{II.12}$$

Esta serie obedece las mismas propiedades que las potencias en una base cualquiera, a^x y precisamente por esa razón se define de esa forma. Por ejemplo:

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}, \quad \text{también} \qquad e^0 = 1.$$

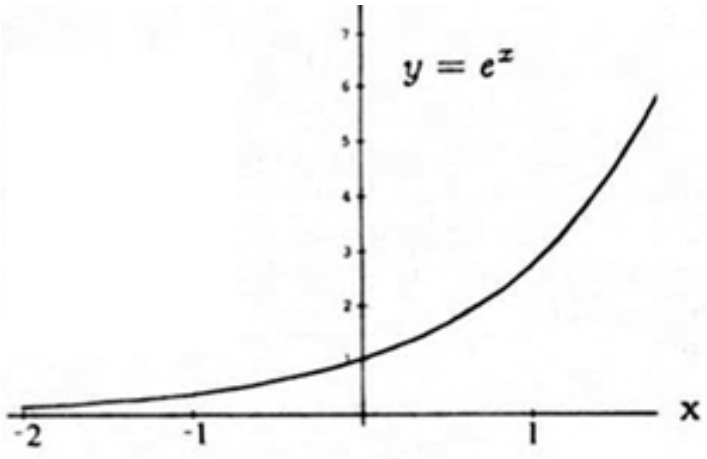


Figura II.5: *Gráfico de la función $y = e^x$. La función exponencial es positiva para todos los valores de x, y toma el valor y = 1, para x = 0.*

Ejercicio

Calcule los dos decimales siguientes en la expresión de $e = 2,7182....$ Grafique la función $y = e^x$

Nota: Calcular los dos decimales siguientes quiere decir que al aumentar el número de términos de la serie incluidos en el cálculo, el valor de los seis primeros decimales no se altera.

- $y = e^x$ es una función positiva a lo largo de todo el eje x.
- También se denomina exponencial de x.
- $f(x) \equiv$ función de x. A un valor determinado de x, $f(x)$ le asocia un número real, si la función es real. Es equivalente a una tabla de valores de dos columnas, o a la información contenida en un gráfico.

II.3.2. La series correspondents a la función seno y coseno

Notablemente las funciones $\cos\, x$ y $sen\, x$ definidas inicialmente como una razón entre los lados de un triángulo, tienen también un desarrollo en serie. Hay una expresión analítica que posee las mismas propiedades de la funciones trigonométricas definidas anteriormente.

Las series correspondientes con estas funciones trigonométricas son

$$cos\, x \equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ... \tag{II.13}$$

$$sen\, x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm ... \tag{II.14}$$

Esta serie es la que debería evaluar internamente una calculadora para obtener el valor del seno de un ángulo. Sin embargo, para mejorar su rapidez, *las calculadoras evalúan esta serie mediante una aproximación*, la aproximación de Padè, que es un cuociente de polinomios *finitos* que aproximan esta función (y otras) con la precisión que uno desee.

Ejercicio

Encuentre, numéricamente, el valor de $sen\, \alpha$ para $\alpha = 0,05$ radianes, de acuerdo a la serie definida con este nombre en la sección anterior. ¿Cuál es el valor de α en grados? ¿Cuál es el error cometido al aproximar $sen\, \alpha \approx \alpha$? (Sume tres términos de la serie y compare la diferencia).□

Ejercicio

Demuestre que con estas series se cumple el teorema de Pitágoras: $\mathrm{sen}^2\, \alpha + \cos^2\, \alpha = 1$. Verifique esta igualdad hasta potencias de α^3. (Cuando multiplique la serie por sí misma, no considere términos con potencias superiores a 7.

□

II.4. APROXIMACIÓN PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS: ARCO Y CUERDA

La definición geométrica de las funciones trigonométricas es la circunferencia de radio unitario. Usando esta misma herramienta geométrica podemos extraer una aproximación muy útil en los desarrollos de problemas en física. Consiste en considerar los casos en que el ángulos α es muy pequeño (siempre medido en radianes) de forma que podemos aproximar el arco de circunferencia subtendido por el ángulo α con la cuerda que une ambos extremos. Esta descripción está graficada

en la Figura II.6.

A continuación ponemos estas afirmaciones en ecuaciones.

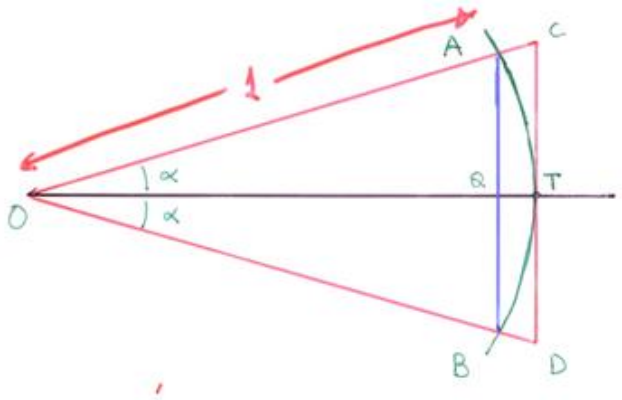


Figura II.6: *Si el ángulo (en radianes) es pequeño, confundiremos el arco con la cuerda.*

IMPORTANTE

Las siguientes *aproximaciones* que se desprenden directamente de las representaciones en serie de las funciones trigonométricas, aparecen con frecuencia en física.

Si α es muy pequeño ($\alpha \ll 1$), se cumple que:

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &\simeq \alpha + O(\alpha^3) \\ cos\,\alpha &\simeq 1 - \tfrac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \\ \tan\,\alpha = sen\,\alpha/cos\,\alpha &\simeq \alpha/(1-\alpha^2) \simeq \alpha(1+\alpha^2) \\ &\simeq \alpha + O(\alpha^3) \end{aligned} \tag{II.15}$$

entonces, a primer orden en α, (es decir:despreciando todas las potencias de α superiores a 1), se cumple:

$$\tan\,\alpha \simeq \alpha \simeq \text{sen}\,\alpha. \quad \square \tag{II.16}$$

El ángulo α debe ser medido en radianes para que estas aproximaciones sean válidas.

GRÁFICO SEN y TAN α

El gráfico muestra el grado de acercamiento entre el sen, la tangente y alpha medido en radianes.

SEN A	A-RADIANES	TAN A	A-GRADOS
0,0100	0,01	0,0100	0,5729
0,0200	0,02	0,0200	1,1458
0,0300	0,03	0,0300	1,7187
0,0400	0,04	0,0400	2,2916
0,0500	0,05	0,0500	2,8645
0,0600	0,06	0,0601	3,4374
0,0699	0,07	0,0701	4,0103
0,0799	0,08	0,0802	4,5832
0,0899	0,09	0,0902	5,1561
0,0998	0,1	0,1003	5,729
0,1098	0,11	0,1104	6,3019
0,1197	0,12	0,1206	6,8748
0,1296	0,13	0,1307	7,4477
0,1395	0,14	0,1409	8,0206
0,1494	0,15	0,1511	8,5935
0,1593	0,16	0,1614	9,1664
0,1692	0,17	0,1717	9,7393
0,1790	0,18	0,1820	10,3122
0,1889	0,19	0,1923	10,8851
0,1987	0,2	0,2027	11,458
0,2085	0,21	0,2131	12,0309
0,2182	0,22	0,2236	12,6038
0,2280	0,23	0,2341	13,1767
0,2377	0,24	0,2447	13,7496
0,2474	0,25	0,2553	14,3225
0,2571	0,26	0,2660	14,8954
0,2667	0,27	0,2768	15,4683
0,2764	0,28	0,2876	16,0412
0,2860	0,29	0,2984	16,6141
0,2955	0,3	0,3093	17,187
0,3051	0,31	0,3203	17,7599
0,3146	0,32	0,3314	18,3328

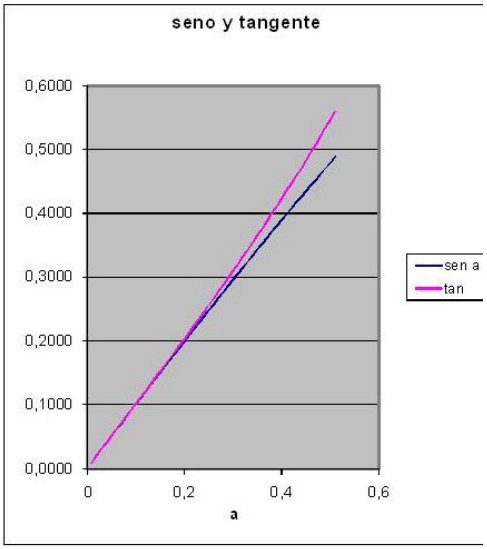


Figura II.7: *Se gráfica la función tangente y seno para ángulos pequeños en radianes. Se puede apreciar que para valores de hasta 0.2, aproximadamente 12º ambas funciones coinciden. El ángulo alpha en radianes no se gráfica pero corresponde a una recta que se confunde con las funciones anteriores en la vecindad del origen.*

II.4.1. Expansión Binomial

Podemos generalizar la fórmula del binomio a un exponente arbitrario. Definimos entonces la forma $(1 + x)^r$ para cualquier valor de r, real, positivo negativo, usando el desarrollo en serie del binomio. Esto nos garantiza que para los casos conocidos anteriormente recuperamos su expresión conocida.

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1 + r\,x + r\,(r-1)\frac{x^2}{2!} + r\,(r-1)(r-2)\frac{x^3}{3!} + ... \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{r!}{(r-\alpha)!}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned} \tag{II.17}$$

Ejemplo

Usando la expresión recién definida, obtenga -sin usar calculadora-, el valor de las siguientes expresiones, manteniendo tres cifras significativas :

a.- $1/\sqrt{101}$, b.- $(59)^{2/3}$, c.- $\sqrt{\pi}$.

Soluciones

La estrategia en estos ejercicios es incorporar un número conocido y fácil de manipular en la expresión del problema.

a.-

$$1/\sqrt{101} = (81 + 20)^{-1/2} = (81)^{-1/2}(1 + 20/81)^{-1/2}$$

$$= (1/9)\left[1 + \frac{r\,(20/81)}{1!} + \frac{r\,(r-1)\,(20/81)^2}{2!} + \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(20/81)^3}{3!} + ...\right]$$

Resta sólo reemplazar $r = -(1/2)$ y podemos evaluar esta serie. El resultado es una aproximación (dependiendo del número de potencias consideradas) al valor correcto.

b.-

$$(59)^{2/3} = [64 + (-5)]^{2/3} = (64)^{2/3}[1 + (-5)/64]^{2/3} = 16\,[1 + (-5)/64]^{2/3}$$

$$= 16\left[1 + (2/3)(-5/64) + \frac{(2/3)(2/3-1)}{2!}(-5/64)^2 + \frac{(2/3)(2/3-1)(2/3-2)}{3!}(-5/64)^3 ...\right]$$

Hemos sido cuidadosos con los signos negativos para evitar las confusiones. Como en el caso anterior, el cálculo se detiene cuando tenemos suficientes cifras significativas. No se pueden calcular, obviamente, todos los términos de la serie.

c.- Consideramos 4 cifras significativas para expresar el número π. $\pi = 3.142$. Esta es la precisión que esperamos obtener en este cálculo. Como requerimos un número fácil de calcular para plantear el esquema de este método, escribimos $\pi = (4 - 0{,}858)$. Entonces, procedemos

$$(\pi)^{1/2} = (4 - 0,858)^{1/2} = 2\,[1 + (-0,858/4)]^{1/2} = 2\,[1 - 0{,}2245]^{1/2}.$$

El resto es calcular la serie hasta que los términos siguientes de la serie no afecten a la cuarta cifra significativa.

Ejemplo

Un móvil viaja con rapidez constante V_o a lo largo del eje vertical de la figura. Un observador ubicado en el vértice **O** de la figura lo vigila tomando una fotografía cada vez que el móvil avanza una distancia Δx =a, constante, a lo largo del eje vertical. Cuando el móvil estaba en la horizontal, frente al vigilante, se encontraba a una distancia **L** de él.

A partir de estos datos se pide encontrar la rapidez con la cual el vigilante debe rotar sus anteojos: $\Delta\theta/\Delta t$, para no perder de vista al móvil. Esto es el vigilante debe rotar un ángulo $\Delta\theta$ cada Δt segundos para tener el móvil en su visor.

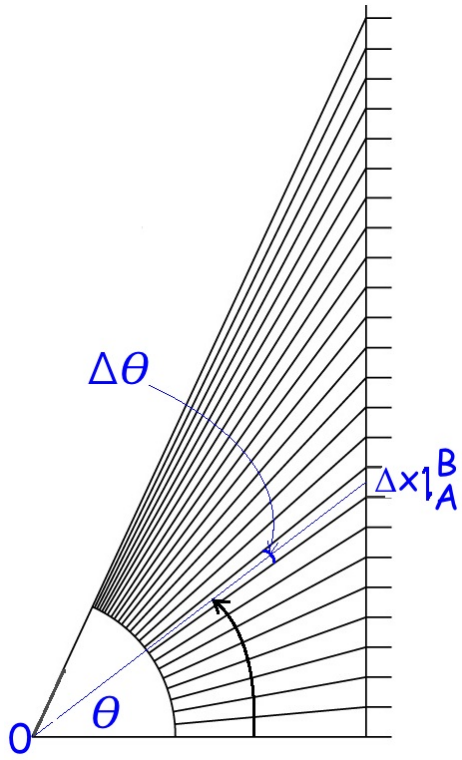
Basta que calcule esta rapidez angular en una posición arbitraria, o para un ángulo arbitrario: θ.

Antes de comenzar a resolver el problema, analice si su respuesta debe ser que la rapidez angular para fotografiar el móvil cambia depende (aumenta o disminuye) a medida que el móvil avanza a lo largo del eje vertical.

Solución

La estrategia es usar la aproximación arco = cuerda, para ángulos pequeños en radianes.

Para ensayar podemos calcular esta expresión cuando ambos protagonistas están más cercanos: en el eje horizontal. Nuestra aproximación considera que una unidad vertical de longitud (**cuerda = eje vertical**) se puede igualar al **arco descrito** por el radio **L** y el ángulo $\Delta\theta_o$, en radianes.



$$\Delta\theta_o \times L = a = V_o\Delta t,$$

de esta forma tenemos

$$\Delta\theta_o = a/L = V_o\Delta t]/L,$$

la velocidad angular en esa posición especial es entonces

$$\frac{\Delta\theta_o}{\Delta t} = \frac{V_o}{L}.$$

Para un posición arbitraria, sólo debemos cambiar la distancia que los separa, ya que la rapidez del móvil es constante y usaremos la misma aproximación del arco y la cuerda. La cuerda es la misma Δx, el radio es la distancia que los separa $\sqrt{L^2 + (V_o t)^2}$. En este caso tenemos

$$\Delta\theta \times \sqrt{L^2 + (V_o t)^2} = V_o\Delta t,$$

la rapidez con la cual debe girar sus anteojo en esta posición es

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{V_o}{\sqrt{L^2 + (V_o t)^2}}.$$

Podemos expresar este resultado en función del ángulos θ si recordamos que la distancia que viaja el móvil V_ot y el ángulo θ están relacionados mediante la tanθ (Ver Figura).

De este modo podemos escribir nuestro resultado de la siguiente forma

$$\frac{\Delta\,\theta_o}{\Delta\,t} = \frac{V_o}{L\,\sqrt{1+(\tan\,\theta)^2}} = \frac{V_o}{L}\,\cos\,\theta.$$

□

II.5. ÁREA ENCERRADA BAJO UNA CURVA

Más adelante se require evaluar el área encerrada bajo una curva y allí haremos uso de las sumas introducidas aquí.

Evaluar el área bajo una curva, es lo que en cálculo se denomina *integrar una función*.

Cabe notar que aún en casos simples se requiere evaluar el área bajo una curva, pero se realiza sin recurrir a sumatorias (o a la integral, si uno tiene conocimientos de cálculo infinitesimal). Por ejemplo, en el movimiento de una partícula con aceleración uniforme, es necesario calcular el área encerrada bajo la curva velocidad vs. tiempo, si desea conocer el camino recorrido por esta partícula. Aquí la *curva* es una recta y el valor del área encerrada corresponde al área de un trapezoide, cuya fórmula es conocida.

Para una partícula que se mueve unida a un resorte o bajo la acción del campo gravitacional debemos recurrir a un método numérico para calcular, primero su velocidad y, posteriormente la distancia recorrida.

II.5.1. Area encerrada por la curva $y = x^2$.

La función $y = x^2$ es un buen ejemplo para calcular el área bajo una curva.

Como método general de cálculo sumaremos el área de cada uno de los rectángulos que aparecen en la Figura . El problema es cómo determinar una altura apropiada para este rectángulo que cubra en forma exacta el área que se quiere avaluar. El procedimiento que usaremos será tomar dos cotas: una superior, donde el rectángulo claramente tiene más superficie que la figura original, y la cota inferior, donde tomamos un rectángulo que toca el valor más bajo de la función en el intervalo a evaluar. Este es el procedimiento más elemental, existen otros métodos más sofisticados diseñados para disminuir el error.

A continuación calcularemos una cota *inferior* para el área bajo la curva de la función $y = x^2$; sumemos los rectángulos achurados, que se ubican *debajo* de la curva:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} \left[(n-1)^2 \cdot \Delta^2\right] \cdot \Delta \tag{II.18}$$

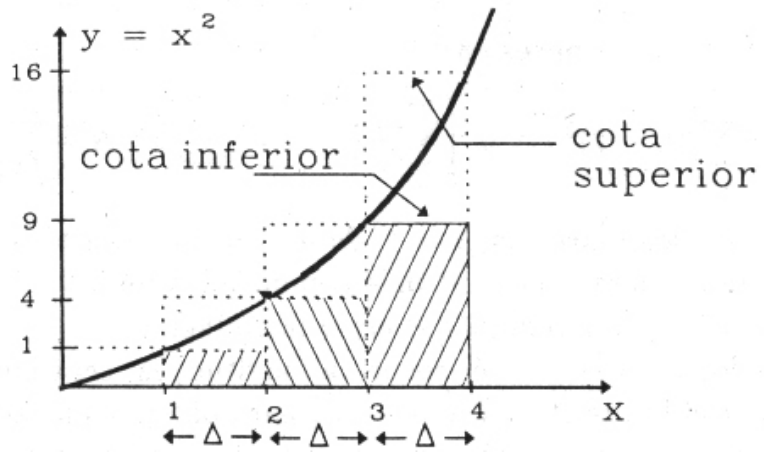


Figura II.8: *El área bajo la curva se ha descompuesto en una suma de rectángulos. Una familia de rectángulos dará como resultado un valor mayor para el área buscada, y la otra familia de rectángulos, un valor menor.*

El término entre corchetes, representa el valor de la función $y = x^2$. Esto proviene del siguiente argumento: si x es el largo y Δ es lo que designamos como la base del rectángulo, entonces $x = (n-1)\,\Delta$ corresponde al valor más bajo de la función para el intervalo en cuestión (ver Figura II.8). En otras palabras, trazamos un rectángulo que toque a la curva $y = x^2$ en el punto más bajo de cada uno de los intervalos. Esta es la cota mínima.

En seguida desarrollamos $(n-1)^2 = n^2 - 2\,n + 1$ y usamos la siguientes propiedades de las sumatorias (válidas si las sumatorias son finitas).

$$\sum_{n=1}^{100}(a_n + b_n) \;=\; \sum_{n=1}^{100} a_n + \sum_{n=1}^{100} b_n, \tag{II.19}$$

$$\sum_{n=1}^{100} \lambda \bullet a_n \;=\; \lambda \sum_{n=1}^{100} a_n, \qquad \lambda = \text{constante}. \tag{II.20}$$

Cota inferior para el área

La sumatoria se transforma entonces en:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100}(n-1)^2 \cdot \Delta^3 = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 \;-\; 2\sum_{n=1}^{100} n \;+\; \sum_{n=1}^{100} 1\right] \Delta^3.$$

Hemos tomado $x_{\text{máx.}} = 100\,\Delta$. Estamos calculando entonces el área bajo la curva encerrada entre $x = 0$ y $x_{\text{máx.}} = 100\,\Delta$. En general, para funciones más complicadas, por ejemplo que aumenten y después disminuyan muy marcadamente, el valor de Δ conviene que dependa de la

posición y por tanto de n con el objeto de minimizar el error introducido. Acá estamos presentando el método y no ahondamos en ese aspecto.

Escribimos el resultado obtenido anteriormente

$$\text{Área}_{INF} = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 - 2\sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 1\right] \Delta^3.$$

En la Figura se aprecia que el área denominada con INF es MENOR que la que el área encerrada bajo la curva $y = x^2$, que es la que debemos calcular.

Cota superior para el área

Ahora si tomamos el rectángulo cuya altura corresponde al valor máximo de la función en el intervalo, entonces obtenemos

$$\text{Área}_{SUP} = \sum_{n=1}^{100} n^2\, \Delta^3. \tag{II.21}$$

En la Figura se aprecia que el área$_{SUP}$ constituye una cota superior para el valor del área que deseamos estimar.

Hemos obtenido una cota superior e inferior para el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$. Con estos dos resultados, parece natural asignar que un valor cercano al valor exacto del área bajo esta curva se obtiene promediando estas dos cotas.

Ejercicio

Demuestre que asociar el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$ con el promedio aritmético del valor del Área Superior y del área Inferior calculada, corresponde geométricamente a trazar una recta que reemplace la curva entre los dos verticales de cada tramo Δ que tocan a la parábola $y = x^2$.

Nota: Considere un trapecio instalado en cada bloque definido por un rectángulo.

□

Se desprende de aquí que para evaluar numéricamente esta área necesitamos, conocer el valor de las sumatorias que han aparecido hasta aquí : $\sum_{n=1}^{N} n$ y $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Incluimos los detalles del cálculo de estas sumatorias en la siguiente sección. Para no desviarnos de este problema, usaremos los valores de estas sumatorias, sin demostrarlos, para obtener el resultado final.

Los valores son

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \tag{II.22}$$

Con estos valores disponibles retornamos a las ecuaciones [**??**], [**??**] que correspondían al área evaluada por defecto (cota inferior) y por exceso (cota superior), respectivamente.

Promediando los valores de ambas cotas, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \tfrac{1}{2}[\text{Área}_{(SUP)} + \text{Área}_{(INF)}]\,\Delta^3 \\
&= \left\{ \tfrac{1}{2}[2\,\textstyle\sum_{n=1}^{N} n^2 - 2\,\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1] \right\}\,\Delta^3 \\
&= \{\, N[(2N+1)(N+1)]/6 - N(N+1)/2 + N/2\}\,\Delta^3 \\
&= \{\, N(N+1)[(2N+1)/6 - 1/2] + N/2\}\,\Delta^3 \\
&= [N^3/3 + N/6]\,\Delta^3
\end{aligned}$$

Si el valor máximo de x es L, entonces, de acuerdo a nuestra partición, $L \equiv N\,\Delta$, donde N es el valor del número de rectángulos considerados en el cálculo. De este modo área bajo la curva es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}[\text{Área}_{(SUP)} + \text{Área}_{(INF)}]\,\Delta^3 \;=\; [N^3/3 + N/6]\,\Delta^3 \;=\; \frac{L^3}{3} \;+\; \frac{L^3}{6\,N^2}. \tag{II.23}$$

El valor exacto de esta sumatoria es $L^3/3$. El error porcentual cometido es del orden de $1/(2\,N^2)$. Si utilizamos 100 particiones (N=100), el error es del orden de una parte en 20.000, o un error de 0.005 $\%$.

Ejercicio

a.- Repita este cálculo para el caso $y = x$.

b.- Calcule el área encerrada entre la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$. Calcule primero el punto donde ambas curvas se cortan, posteriormente calcule las áreas separadamente y reste adecuadamente sus resultados. □

II.5.2. Método general para evaluar $\sum_{n=1}^{N} n^k$.

Aquí propondremos un método simple y general para evaluar las sumatorias indicadas en el título de esta sección.

Como ejemplo para ilustrar el método obtendremos el valor de la siguiente sumatoria

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + ... + N.$$

Consiste en calcular la siguiente combinación de sumatorias,

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

Esta combinación de sumatorias no parece estar relacionada con la sumatoria que nos interesa, pero al desarrollar el binomio de la primera sumatoria aparecen dos características relevantes para esta evaluación de sumatorias. Primero

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N}(n^2+2n+1) - \sum_{n=1}^{N} n^2 = \sum_{n=1}^{N}(2\,n+1). \qquad \text{(II.24)}$$

Donde hemos usado la asociatividad de la sumatoria (la misma propiedad de los números reales) [II.19], y con ello hemos cancelado las sumatorias que contenían n^2.

En segundo lugar, la resta de sumatorias que aparece a la izquierda de la última ecuación puede ser evaluada fácilmente si escribimos cada uno de sus términos en columnas separadas como se indica a continuación:

2^2	$-$	1^2	primer término de la sumatoria,
3^2	$-$	2^2	segundo término de la sumatoria,
4^2	$-$	3^2	tercer término de la sumatoria,
$\vdots$			$\vdots$
$(N+1)^2$	$-$	N^2	N–ésimo término de la sumatoria.

$(N+1)^2$ - 1.

Es fácil ver que los términos de la suma se van anulando entre ellos, permaneciendo sólo el primero y el último, cuya diferencia es el resultado de la suma. las series con esta característica se denominan series telescópicas y surgen frecuentemente en nuestros problemas.

El valor de la suma es: $N\,(N+2)$.

Por otra parte el término de la derecha de la ecuación [II.24] es:

$$2(\sum_{n=1}^{N} n) + \sum_{n=1}^{N} 1 = 2(\sum_{n=1}^{N} n) + N.$$

De aquí se puede despejar $\sum_{n=1}^{n=N} n$ que es la sumatoria cuyo resultado buscamos:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \tag{II.25}$$

Ejercicio

Usando este método, reobtenga el valor de la siguiente sumatoria:

$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N(2N+1)(N+1)/6.$

Indicación: use la ecuación [II.24], pero incluyendo potencias cúbicas en lugar de las cuadráticas que allí aparecen.□

Resumiendo: *con este método se puede calcular la sumatoria de una potencia arbitraria de n. Para ello se debe conocer el valor de la sumatoria de una potencia más baja que la buscada y calcular la diferencia entre los valores de las dos sumatorias de una potencia inmediatamente superior, en la forma ya señalada.*

II.5.3. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n$

A pesar que el resultado de esta sumatoria es el mismo si N es par o impar, analizaremos ambos casos en forma independiente.

Consideremos primero el caso de N par.

$$\sum_{n=1}^{N} n = \overbrace{\underbrace{1 + 2 + \overbrace{3 + \underbrace{4 + ... + (N-3)}} + (N-2)} + (N-1)} + N$$

Para evaluar esta sumatoria reagruparemos los términos de la sumatoria en la forma señalada en la Figura: sumamos en pares aquellos unidos por el extremo de cada una de las llaves indicadas en la Figura. El valor que toma cada uno de estos pares es $(N+1)$. Ahora si *N es par* el número de llaves que debemos considerar es $N/2$ puesto que la suma tiene N términos, y el valor de la suma es $N/2$ veces $(N+1)$:

$$\sum_{n=1}^{N} n = (N+1)\frac{N}{2}. \tag{II.26}$$

N impar.

Si N es impar, la suma de cada par de términos tiene el mismo valor que antes $(N+1)$, **excepto** que ahora al agruparlos permanece uno (el del centro), sin compañero. El valor de este término, es $(N+1)/2$.

En este caso la expresión que toma la sumatoria es

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + ... + \overbrace{\frac{(N+1)}{2}} + ... + (N-1) + N$$

Sumamos entonces teniendo en cuenta que el valor del término central es $(N+1)/2$, y que debe ser sumado en forma aparte. El valor de la sumatoria se obtiene sumando $(N-1)/2$ veces $(N+1)$ y añadiendo el término central $(N+1)/2$. Recuerde que (N - 1) es un número par, y que la suma del primero y el último de este par es $(N+1)$.

El resultado final es

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=1}^{N} n &= (N+1) \bullet (N-1)/2 + (N+1)/2 \\ &= (N^2-1)/2 + (N+1)/2 \\ &= N(N+1)/2 \end{aligned}$$

Vemos que la expresión es la misma, sea N **par o impar**, de modo que:

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2 \qquad \text{(II.27)}$$

El método expuesto se debe a Gauss.

Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^{N} n^2$.

Para evaluar la cota inferior o superior para el área encerrada bajo la curva, necesitamos conocer el valor de otra sumatoria, aquella que contiene n^2. Usaremos dos métodos diferentes para evaluar la suma. El procedimiento indicado a continuación es complejo. Lo estudiaremos como una forma de familiarizarnos con la manipulación de las sumatorias.

Incluiremos otro método, más simple, como ejercicio al final de este capítulo.

A partir de la Figura, sumando los puntos ubicados dentro del cuadrado con línea cortada, se puede verificar la siguiente igualdad:

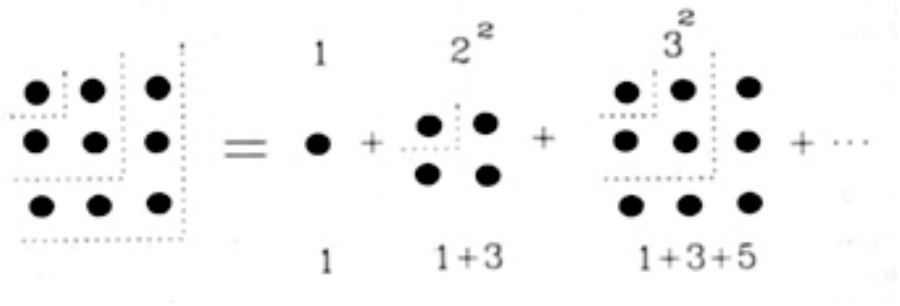


Figura II.9: *La Figura muestra los puntos dentro del cuadrado con línea cortada que permite evaluar una suma cualquiera de números impares. Usaremos este esquema para encontrar el valor de* $\sum n^2$.

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 \\ 1+3 & = 2^2 \\ 1+3+5 & = 3^2 \\ \cdots & \vdots \\ 1+3+5+\cdots+(2N-1) & = N^2 \end{array}$$

Los valores ubicados a la derecha del signo igual son los números que nos piden evaluar. Sumando los números de la izquierda por columnas, obtenemos:

$$N + 3\cdot(N-1) + 5\cdot(N-2) + ... + (2N-1)\cdot 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Para obtener este resultado recordemos que hay N filas y que se han sumado columna por columna. El resultado en la ecuación anterior está escrito en el mismo orden. También podemos *verificar* que la suma que aparece a la izquierda del signo igual se puede escribir , después de agrupar los términos convenientemente, como

$$\overbrace{(1)}\cdot\underbrace{[N]} + \overbrace{(3)}\cdot\underbrace{[N-1]} + ... + \overbrace{(2N-3)}\cdot\underbrace{[2]} + \overbrace{(2N-1)}\cdot\underbrace{[1]} \;=\; \sum_{n=1}^{N}\overbrace{(2n-1)}\,\underbrace{[N-(n-1)]}\,.$$

Las llaves *sobre* los números a la izquierda del signo igual, indican una familia de términos representada por la expresión genérica $(2\,n-1)$. Este factor se ubica, con la misma identificación, a la derecha del signo igual. Análogamente, los términos con una llave *bajo* el número, son generados por el término señalado a la derecha de la ecuación con una llave similar.

Ejercicio

Verifique que (2 n - 1) es un número impar para cualquier valor de n y, que en este caso, toma cada uno de los valores de los números que caracterizan a cada columna, exactamente en el mismo orden en que van apareciendo.

Verifique, dando distintos valores de n, que el término entre paréntesis cuadrado reproduce el otro factor de la suma. □

Igualando este último resultado con la sumatoria de n^2, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}(2n-1)[N-(n-1)] = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

El resto del cálculo se reduce a separar en un miembro de la ecuación la sumatoria de n^2 y en el otro el resto de los términos.

Desarrollando el miembro de la izquierda, de acuerdo a las reglas establecidas, tenemos

$$N\sum_{n=1}^{N}(2n-1) \;\; - \;\; \sum_{n=1}^{N}(2n-1)(n-1) = \sum_{n=1}^{N} n^2.$$

Aplicando, nuevamente, las propiedades conocidas de las sumatorias,

$$2N\sum_{n=1}^{N} n - N\sum_{n=1}^{N} 1 - 2\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = \sum_{n=1}^{N} n^2$$

Ordenando sumatorias de potencias similares

$$(2N+3)\textstyle\sum_{n=1}^{N} n \;\; - \;\; (N+1)\sum_{n=1}^{N} 1 \;\; = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

reemplazando el valor obtenido para $\sum_{n=1}^{N} n$, [**??**], y recordando que $\sum_{n=1}^{N} 1 = N$, tenemos:

$$2N^2(N+1)/2 - (N+1)\,N + 3N(N+1)/2 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2,$$

y finalmente, haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N[(2N+1)(N+1)]/6. \qquad \text{(II.28)}$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de N.

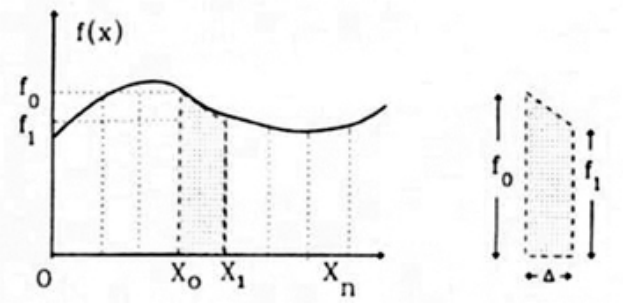


Figura II.10: *Regla de Trapecio. Tomando un conjunto de puntos de la curva, se calcula el área como la suma del área de los trapecios construidos uniendo los puntos mediante rectas.*

II.5.4. Regla del trapecio.

A continuación incluímos la fórmula usada para calcular numéricamente el área bajo una curva $y = f(x)$ usando trapecios (en lugar de rectángulos) como unidades elementales. De cualquiera de las Figuras de esta Sección, se desprende que la idea es acomodar un trapecio bajo la curva, apoyando uno de sus catetos en el eje x y el cateto opuesto aproxima la curva mediante una recta.

Si queremos calcular el valor del área bajo la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$, dividimos dicho segmento en $(N-1)$ segmentos mediante los puntos x_n con $0 \leq n \leq N$. El valor de la función en cada uno de sus puntos se designa como $f_n \equiv f(x_n)$, es decir $f_0 \equiv f(x_o) = f(a)$, $f_1 \equiv f(x_1)$... $f_N \equiv f(x_N) = f(b)$, donde hemos identificado x_0 con a y x_n con b.

Recordemos que el área de un trapecio es la semisuma de sus bases multiplicada por la altura. La fórmula para el área de un trapecio cualquiera dentro del tramo de interes es:

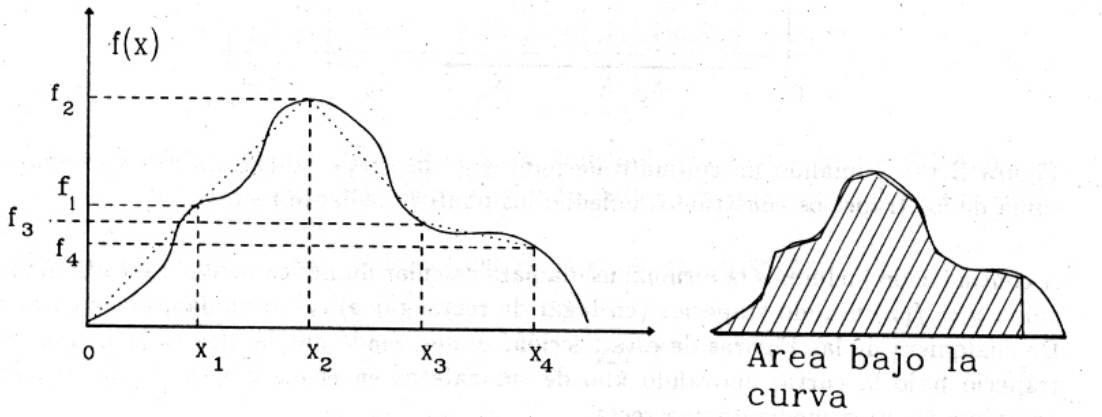
$$\text{Area del trapecio} = \frac{1}{2}\,[f_{n-1} + f_n]\,(x_n - x_{n-1}).$$

En este caso, el trapecio está puesto en forma vertical: la base del trapecio es cada una de las verticales señaladas como f_0, f_1, f_2,... f_N, cuyo valor es el valor que toma la función $f(x)$ para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$...$x = N$ respectivamente (ver Figura).

Si sumamos el área de cada uno de los trapecios de la Figura, suponiendo que todos los trazos son iguales: $[x_n - x_{n-1}] \equiv \Delta$, para simplificar el álgebra, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_a^b f(x)\Delta \simeq \quad & \Delta[f_0 + f_1]/2 + \\ & \Delta[f_1 + f_2]/2 + \Delta[f_2 + f_3]/2 + ... \\ & + \Delta[f_{N-2} + f_{N-1}]/2 + \Delta[f_{N-1} + f_N]/2. \\ = \; \Delta & \left\{ 1/2 \cdot f_0 + \left[\sum_{i=1}^{N-1} f_i \right] + 1/2 \cdot f_N \right\}. \end{aligned} \tag{II.29}$$

La suma $\left\{\sum_a^b f(x)\,\Delta\right\}$ indica el valor del área encerrada entre $x = a$ y $x = b$ por la función f(x).



II.6. EJERCICIOS

1.– A partir de la serie:

$$(1+x)^n = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{n!}{(n-\alpha)!}\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

compruebe que para $h << 1$, es posible aproximar $(1+h)^n$ como:

$$(1+h)^n \approx 1 + n\,h + O(h^2).$$

Para verificar la exactitud de esta aproximación, elija tres valores de h, por ejemplo: 0,01, 0,1 y 0,5, con ellos calcule el valor de $(1+h)^8$ de dos formas: utilizando la expresión exacta y a través de la aproximación mencionada. Compárelos y estime el porcentaje de error cometido, en cada uno de los casos, al truncar la serie.

2.– Compruebe si la igualdad propuesta es correcta.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

a.- Para calcularla numéricamente, procure reordenar la serie agrupando términos consecutivos, y calculando su valor. Por ejemplo calcule como: (1-1/3)+ (1/5 - 1/7)+ ... Éstos son los nuevos términos de la serie reordenada.

b.- Muestre que la serie reordenada se puede escribir como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}.$$

3.– Calcule el valor de las siguientes series:

$$a) \quad 1 + 1/2! + 1/3! + ..,1/n! + ...$$

$$b) \quad 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + ...$$

$$c) \quad 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + ...$$

Respuestas: a) $(e-1)$, b) e^{-1}, c) $(1 - e^{-1})$.

Compruebe estos resultados numéricamente.

4.– Sean α y δ dos ángulos medidos en radianes.

i) Usando la expresión para la suma de ángulos, calcule:

$$\frac{[\,\text{sen}(\alpha+\delta) - \text{sen}\,\alpha]}{\delta},$$

ii) Haga tender a cero el valor de δ, es decir, suponga que $\delta << 1$ y calcule el valor de la expresión anterior, utilizando las aproximaciones relevantes.

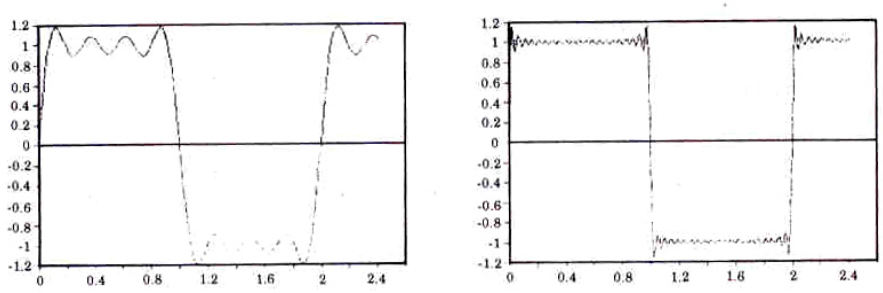


Figura II.11: *El gráfico de la izquierda corresponde a la serie truncada en el octavo término. Si se incluyen los primeros 41, se obtiene el gráfico de la derecha.*

5.– Graficar la función:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}[\,\text{sen}\,x + (\,\text{sen}\,3x)/3 + (\,\text{sen}\,5x)/5 + ...]$$

Compruebe que al aumentar el número de términos de la serie, ésta se aproxima rápidamente a la función:

$$f(x) = \quad +1 \qquad 0 < x < \pi$$

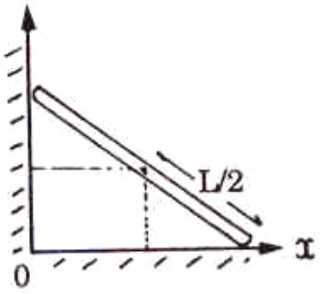
$$f(x) = \quad -1 \qquad \pi < x < 2\pi$$

Compruebe que para $x = \pi$ se produce una discontinuidad de la función y en el caso que $n \to \infty$, este salto es del orden de un $18\,\%$ de la altura de la función.

¿Puede ver esto en el gráfico del computador ? (Nota: sume un número grande de términos de la serie).

6.– Considere una escalera apoyada en una muralla.

Demostrar que el punto medio de esta escalera, de largo L que resbala apoyándose en el muro, describe una circunferencia.
La ecuación de una circunferencia de radio R es: $x^2 + y^2 = R^2$.



7.– Una camionada de arena seca se descarga formando un cono cuya base es una circunferencia de 4 metros de diámetro. Si la pendiente de la arena seca es de $\theta = 32^\circ$ y su densidad es $\rho = 1,7$ g/cm^3, calcule la masa de la arena.

skip

8.– Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.

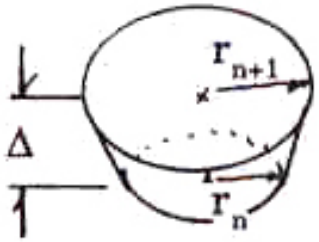
9.– ¿Cómo cortaría un cubo mediante un plano de forma que la intersección entre el plano y las superficies de cubo formen un hexágono regular?

10.– Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras. Debe definir lo que entiende por un ángulo entre dos superficies planas.

11.– ¿Para qué latitud, el paralelo terrestre tiene 1/3 de la longitud del Ecuador?

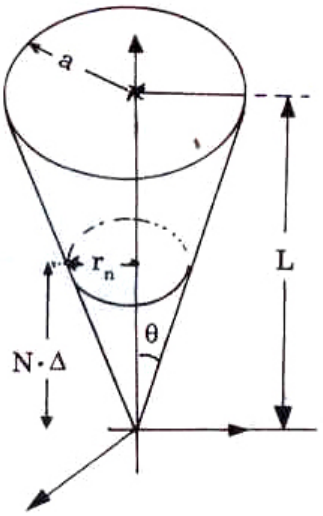
12.– Se pide calcular el volumen del cono que se muestra en la Figura.

Para ello se sugiere trabajar de la siguiente forma:
a) Descomponga el cono en una suma de troncos de cono de altura constante Δ y cuyo volumen está dado por la fórmula siguiente:



$$V_{\text{Tronco de Cono}} = \pi \cdot \left[\frac{r_n + r_{n+1}}{2}\right]^2 \cdot \Delta.$$

Sume cada uno de estos volúmenes hasta completar el cono. Use las propiedades de la sumatoria y los resultados obtenidos anteriormente para:



$$\sum_{n=1}^{n=N} n^2 = \frac{N(2N+1)(N+1)}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$r_n = n{\cdot}\Delta{\cdot}\tan\theta,\ \Delta = \text{Cte.}, \tan\theta = \frac{a}{L} = \text{Cte.}$

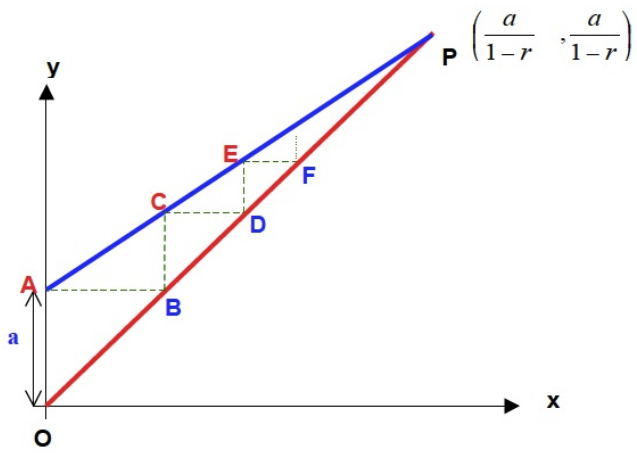
b) Para obtener el valor exacto del volumen de un cono, tome los siguientes límites en los resultados anteriores:

$$\Delta \longrightarrow 0, \qquad N \longrightarrow \infty,$$

de manera que el producto permanezca constante.

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta \to 0}} N \bullet \Delta = L.$$

13.– En la figura aparecen dos líneas rectas que se cortan en el punto **P** de coordenadas (a/(1-r), a/(1-r)). r es un número positivo menor que la unidad: $0 < r < 1$ y **a** es un número real positivo arbitrario, como 2,3 ó 3 ó 4,5.



A partir de la figura:

a.- Escriba la ecuación de la recta que pasa por el origen O y el punto P. b.- Muestre que la ecuación de la recta que pasa por el punto A y el punto P adopta la forma y = r x +a c.- Demuestre que AB es igual a OA = a d.- ¿Qué longitud tiene BC? (Puede ser de ayuda considerar la pendiente de la recta AP) e.- ¿Qué longitud tiene ED? f.- A partir de la figura y sumando los trazos AB, CD, EF... obtenga el siguiente resultado: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... = a/[1 - r]$

14.– Consiga una hoja de papel muy larga y con un grosor de $0,1$ mm $(10^{-4}$ m). Comience a doblarla por su mitad, de manera que en cada doblez el grosor aumenta al doble.

¿Cuántos **dobleces** son necesarios, para que el grosor final que adquiere, alcance a cubrir la distancia Tierra–Luna (aproximadamente 380.000 Km)?
Antes de hacer el cálculo escoja alguna de las alternativas propuestas en la Tabla.

a) 42 veces
b) 1320 veces
c) 483200 veces
d) 639421 veces
e) $2,4 \bullet 10^8$ veces.

Ahora calcule y concluya cuánto puede confiar en su intuición.

En el sitio del New York Times apareció un artículo con el título **Power Tools** de Steven Strogatz (matemático) donde relata una estudiante de secundaria de Pomona, California, Britney Gallivan, estudiando este problema dedujo una fórmula que relacionaba el largo del papel **L** con el número de dobleces **n**

$$L = \frac{\pi T}{6} (2^n + 4)(2^n - 1))$$

donde **T** es el grosor del papel. Llevó su fórmula a la práctica y con un papel higiénico de 3/4 de milla de longitud logró doblarlo 12 veces, verificando así su predicción. Las potencias de 2 aparecen dos veces en la fórmula debido a que en cada doblez, se duplica el grosor y disminuye a la mitad el largo del papel. La página donde apareció esto es

http://opinionator.blogs.nytimes.com/2010/03/28/power-tools/

Ver U-cursos.

15.– Estudie la siguiente situación: alrededor del Ecuador terrestre se construye un anillo metálico que calza en forma exacta, sin huelgo. A continuación se corta el anillo metálico en un punto y se le agrega un pedazo de anillo de 1 metro de longitud. Si al agregarle el nuevo pedazo, el anillo queda suspendido equidistante de la superficie terrestre a una altura h:

a) Estime, sin calcular: ¿A qué altura queda el anillo?

b) Haga el cálculo numérico y compare con su estimación.

16.– a.- ¿Con qué rapidez puede Ud. lanzar una piedra?

b.- ¿Qué velocidad cree Ud. que alcanza una bala a la salida del cañón.

En ambos casos, justifique cuantitativamente su estimación.

17.– a.- Calcule *numéricamente* el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = ?$$

Indicación:

Calcule esta suma con tres cifras significativas. Descarte los términos de la serie más pequeños que 10^{-4} y al sumarlos aproxime la última cifra de modo que mantenga el mismo número de cifras significativas del comienzo.

b.- Recordando que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

Calcule *el valor exacto* de la serie propuesta en la parte a).

Se propone el siguiente método:
1.- Escriba la serie correspondiente al número $e = e^1$.
2.- A la serie propuesta en la primera parte, sume la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)! \qquad \textit{término a término.}$$

3.- Relacione esta nueva serie con la asociada al número **e**.

18.– **Estimación del alcance visual sobre el horizonte.**

Suponga que un observador se encuentra a una altura**h** sobre el piso en un terreno sin accidentes . ¿A qué distancia ℓ, se halla el horizonte visible?

Use la aproximación h/R<<1, en la expresión final de su resultado.

(Use $R = 6{,}400$ km). Calcule ℓ para:

$h_1 = 2$ m, ($\sim$ estatura de una persona),

$h_2 = 20$ m, ($\sim$ vigía de un barco),

$h_3 = 300$ m, ($\sim$ altura del cerro San Cristóbal).

(Ver Figura)

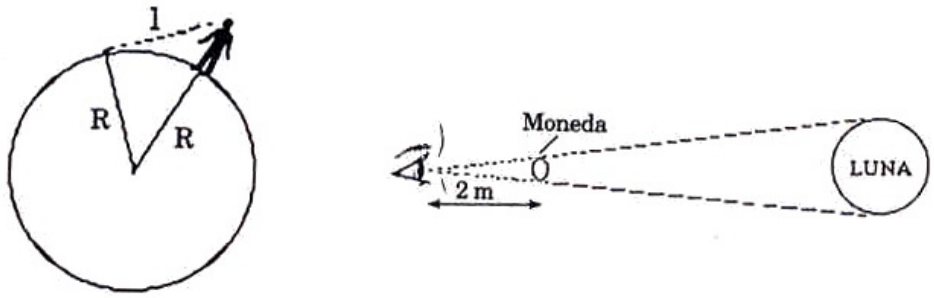


Figura II.12:

19.– **Relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.**

Se intercala una moneda de un diámetro de 2 cm. entre el ojo y la Luna, ocultándola a la vista. La moneda se aleja gradualmente, encontrándose que el borde de la Luna empieza a ser visible cuando la moneda está a unos dos metros de la pupila.

Use estos datos para encontrar una relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.

20.– **Tamaño de la Luna y distancia a la Tierra.**

El tamaño de la Luna fue comparado con el de la Tierra por Aristarco (270 A. de C.), durante un eclipse lunar. (Esto ocurre cuando la Tierra se interpone entre la Luna y el Sol). Aristarco midió el tiempo que tardaba la Luna en cruzar la sombra de la Tierra, y encontró que el diámetro de la sombra terrestre era dos veces y media el diámetro de la Luna.

Sin embargo, la sombra de los planetas no es un cilindro, sino un cono. Durante una eclipse solar (cuando la Luna se interpone entre el Sol y la Tierra), es sólo un poco más que el vértice del cono de sombra de la Luna lo que alcanza a la Tierra.

Aristarco dedujo esto observando que durante el eclipse, la Luna cubre apenas el disco solar. Argumentó que en un eclipse de Luna, la sombra de la Tierra se reduce en la misma razón que en el caso de la Luna.

Con estos datos, deduzca que $d = \frac{2}{7}D$, donde d es el diámetro lunar y D, el diámetro terrestre. Usando este resultado, el valor del radio terrestre y la relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra, estime:

a) el diámetro lunar,

b) la distancia Tierra–Luna.

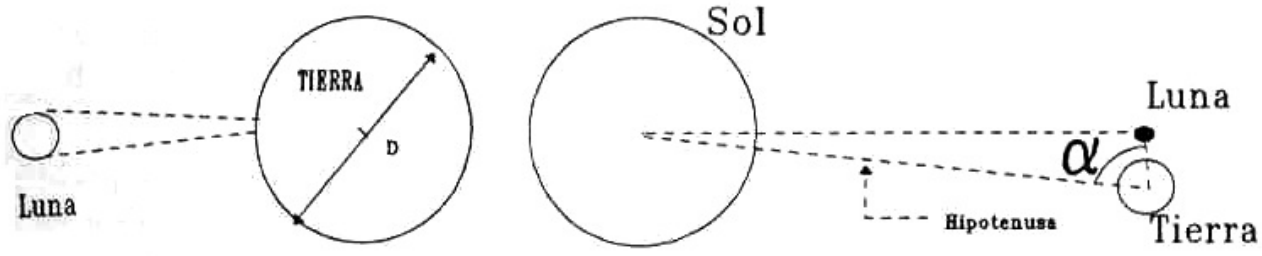


Figura II.13:

.

21.– **Distancia Tierra–Sol.**

La distancia de la Tierra al Sol es difícil de estimar. Aristarco notó que cuando hay media Luna (es decir, se ve iluminada exactamente la mitad del disco lunar), los rayos del sol deben caer sobre la Luna perpendicularmente con respecto a la línea de visión del observador. En ese momento es posible medir el ángulo α con que el Sol es visto desde la Tierra. Su valor es muy cercano al de un ángulo recto: $90^\circ - \alpha \simeq 1^\circ$.

(Aristarco, erróneamente, lo estimó en: $90^\circ - \alpha \simeq 3^\circ$).

Use este resultado y la distancia Tierra–Luna, para estimar la distancia Tierra–Sol.

Estime, además, la rapidez (módulo de la velocidad) con que la tierra orbita alrededor del Sol.

22.– **Masa de la Tierra.**

La mayoría de los líquidos y sólidos constituyentes de nuestro planeta tienen densidades que fluctúan entre 1 y 10 kg/lt. A partir de estos datos y usando $R = 6{,}400$ km para el radio de la Tierra, *estime* un valor para su masa.

Capítulo III

UNIDADES, DIMENSIONES Y ESTIMACIONES

Las Ciencias Naturales engloban diversas disciplinas, entre las cuales se encuentran la Física, la Biología, la Química y la Astronomía. Cada una de ellas procura formular un esquema coherente . que permita entender y predecir diversos fenómenos que ocurren en la naturaleza.

Ciertamente, estas divisiones indican grados de especialización. En algunos casos, el mismo fenómeno puede concitar simultáneamente el interés de científicos de diversas disciplinas. Por ejemplo, el estudio de los objetos que presentan una evolución caótica en el tiempo, interesan simultáneamente a los físicos y matemáticos. De igual modo, la determinación de la estructura del ácido desoxiribonucléico (ADN) –la molécula portadora de la información genética en animales y vegetales–, fue el resultado del esfuerzo conjunto de biólogos, químicos, bioquímicos y físicos.

Quienes tienen como oficio el estudio de las distintas manifestaciones de la naturaleza se les denomina científicos.

La elaboración de un esquema lógico, acompañado de un lenguaje matemático, recibe el nombre de teoría. La teoría es un esquema mental que permite reunir un número de fenómenos (observaciones) bajo una sola mirada. Un ejemplo claro de una buena teoría son las observaciones de Kepler del planeta Marte. Su resultado es una lista enorme de números que describen la posición de Marte en el tiempo. Las tres leyes de Kepler le otorgan coherencia a esta lista de números. Es la teoría del sistema solar de Kepler.

La invención de las tres leyes de la dinámica de Newton y de su ley de Gravitación Universal constituye claramente una teoría superior a la elaborada por Kepler. Es Universal para su tiempo porque estas leyes se aplican al universo concebido en ese tiempo: la caída de los objetos en la Tierra y el movimiento observado de los planetas en el cielo. La teoría de la Gravitación inventada por Newton incluye las tres leyes de Kepler como una consecuencia lógica.

La gravitación de Newton es superada por la posterior invención de la gravitación de Einstein. Esta última permite definir fenómenos nuevos como la desviación de la luz al pasar cerca del Sol, la existencia de agujeros negros, las ondas gravitacionales (descubiertas recientemente) y permite

elaborar un modelo de la evolución del universo.

Las predicciones de una teoría deben ser verificadas *experimentalmente* para conocer los límites de su aplicación. Para la medición se requieren unidades, dimensiones.

Al calibrar la magnitud de los efectos de una determinada ley física frente a otros fenómenos también presentes, se debe estimar su efecto. Por ejemplo, a pesar que la gravitación de Einstein es una mejor teoría que la de Newton, esta última es la que se utiliza en el lanzamiento de satélites que orbiten alrededor de la Tierra o en el Sistema Solar. Otros fenómenos físicos son más relevantes y dignos de consideración, que los efectos de la Gravitación de Einstein. En este caso la gravitación de Newton es más simple y útil.

III.1. UNIDADES

III.1.1. Introducción

Las leyes de la Física son relaciones entre propiedades de la materia medibles en un laboratorio tales como: longitud, tiempo, masa, temperatura, energía, etc. Consecuentemente, es necesario contar con *unidades* o patrones de medida, que permitan cuantificar esas magnitudes. Por ejemplo, medir la distancia entre dos puntos ubicados sobre una recta, significa comprobar el número de veces que una varilla patrón – elegida arbitrariamente como la unidad de longitud– está contenida en el trazo que conecta dichos puntos. Si el resultado es 3, se dice que la distancia entre los puntos es igual a 3 unidades de longitud.

El valor de una propiedad física cualquiera debe indicar la unidad que se ha utilizado como patrón. Por ejemplo, si en el caso anterior se hubiera usado el metro como unidad de medida, la distancia se expresaría como 3 metros.

La mayor parte de las unidades que se utilizan corrientemente se pueden expresar como combinación de un grupo reducido de ellas, llamadas *unidades fundamentales*. En el *Sistema Internacional (SI)*, las más conocidas son: el *metro*, el *kilógramo* y el *segundo*. Otras magnitudes, tales como la energía, el momentum lineal, la fuerza, etc., poseen unidades que se expresan en función de este conjunto fundamental.

En este libro usaremos el Sistema Internacional de Unidades en la mayoría de los ejemplos y ejercicios propuestos.

III.1.2. Tiempo

El **segundo** (s) fue definido originalmente como la $1/86400$ parte de un día solar medio (esto es, el tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el cenit, promediado a lo largo de un año). La definición moderna de un segundo es más precisa, pero tiene la desventaja de ser más difícil de explicar en base a conceptos básicos. La incluimos aquí como una información cuyo sentido

aparecerá claro más adelante.

El **segundo** se define como el tiempo que debe transcurrir para detectar $9,192631770 \times 10^9$ ciclos (o vibraciones) consecutivas en la luz proveniente de una transición hiperfina entre dos estados permitidos de un átomo de Cesio.

En la actualidad, el patrón o unidad de tiempo se puede determinar con gran precisión. El segundo se puede medir, sin error, con doce cifras significativas. Con el objeto de aprovechar este enorme progreso, se ha definido la unidad de longitud (el metro) en base al segundo. Para ello debemos previamente *definir* la velocidad de la luz. Esta decisión no genera problema alguno, puesto que la velocidad de la luz es una constante universal. Obviamente, el valor usado no altera las unidades previamente establecidas. Este es:

$$\mathrm{c} \equiv \text{velocidad de la luz} = 299.792.458 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right],$$

Combinando la definición de un segundo y la velocidad de la luz, obtenemos la unidad de longitud: el *metro*, con un grado de precisión equivalente al del segundo. En este contexto, el metro se define como la distancia que recorre la luz en el espacio vacío durante $1/299{,}729{,}458$ segundos.

Note que, como el valor de la velocidad de la luz fue *definido*, no puede contener error de medición.

Revisemos como ha ido mejorando la precisión en la determinación de la unidad de tiempo a través de este siglo.

Hasta hace algunas décadas, la rotación diaria de la Tierra con respecto al sol, se utilizaba para definir el largo del día (*día solar*) y a partir de este intervalo se definía el segundo medio. Los relojes se ajustaban de manera de seguir lo más exactamente posible el largo del día solar.

El *día sideral* se determina midiendo el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de una estrella muy brillante a través del meridiano del observatorio astronómico.

Cuando la exactitud alcanzada en la medida del tiempo mejoró, fue posible preguntarse si efectivamente la duración del día era una constante a través del tiempo o sufría pequeñas variaciones. La duda se originó del siguiente modo. En 1936, los relojes de péndulo alcanzaron una precisión de *una parte en* 10^8 y así se logró establecer que el largo del día en el mes de Enero de ese año *excedió* al de Julio por, aproximadamente *5 milisegundos*.

Más adelante, con la aparición de los relojes atómicos que alcanzan una precisión de una parte en 10^{12} ó 10^{13} , quedó absolutamente claro que la duración del día variaba en forma *compleja* con componentes periódicos anuales, semianuales, con el período de la Luna e incluso durante el transcurso de una *noche* con amplitudes del orden de las *décimas* de milisegundo.

El fenómeno de El Niño ocurrido en 1982 - 1983, marcó un máximo notable en el largo del día, con un aumento de hasta 30 milisegundos sobre el valor promedio, durante el mes de marzo de 1983.

III.1.3. Longitud

Las unidades siempre se definen en forma arbitraria. El criterio empleado para elegirlas es, entre otros, facilidad de reproducción y maniobrabilidad.

Un ejemplo de esta arbitrariedad es la existencia de diferentes unidades de longitud: el metro, la pulgada, el pie, la yarda, la milla...etc.

El metro (m) fue originalmente definido como la distancia que separa a dos marcas grabadas sobre una barra fabricada de una aleación de platino e iridio, que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. La elección fue hecha de manera que la distancia entre el Ecuador y el Polo Norte, medida a lo largo del meridiano que pasa por París fuera exactamente 1×10^7 metros.

Esta última afirmación nos hace meditar acerca de la necesidad de una nueva unidad de longitud, más precisa y más fácil de repetir que la recién definida. Es difícil pensar en obtener una precisión del orden de una parte en 10^7 al medir una distancia tan grande, esto sin mencionar que fue realizada con los medios disponibles durante el siglo pasado.

En la actualidad el metro se define como:

Un metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299.792.458 segundos.

A continuación se muestra una lista con distancias y tamaños de diversos objetos. Se incluyen las unidades usadas en astronomía: el parsec y la Unidad Astronómica.

OBJETO	DISTANCIA
Tamaño del Universo	10^{26} m
Galaxia Andrómeda	$6,5 \times 10^5$ parsec $\approx 2 \times 10^{22}$ m
1 parsec $\equiv$ 1 pc	3,09 $\times 10^{16}$ m = $6,48 \times 10^5/\pi$ A.U.
Unidad Astronómica = 1 A.U.	1,5 $\times 10^{11}$ m
α-Centauri (estrella más cercana)	1,3 pc
Diámetro de nuestra Galaxia	3×10^4 pc
Dist. Sol–Centro de la Galaxia	9×10^3 pc
1 Año Luz	$9,46 \times 10^{15}$ m
Distancia Sol – Tierra	1 A.U.=$1,5 \times 10^{11}$ m
Radio del Sol	$6,96 \times 10^8$ m
Distancia Tierra–Luna	$3,84 \times 10^8$ m
Radio de la Tierra	$6,38 \times 10^6$ m
Radio de la Luna	$1,74 \times 10^6$ m
Grano de Sal	10^{-3} m
máxima resolución del ojo humano	1×10^{-4} m
Diámetro de un cabello humano	2,5 $\times 10^{-5}$ m
Virus	10^{-7} m
Diámetro de la hélice del ADN	2×10^{-9} m
Radio de un Atomo	10^{-10} m
Radio del Núcleo Atómico	10^{-15} m

Una característica importante del sistema internacional *SI* es su estructura decimal: las unidades más grandes se definen como potencias de diez de las unidades más pequeñas. Por ejemplo, 1 kilómetro $\equiv$ 1 km = 10^3 m, 1 m = 10^2 centímetros $\equiv$ 10 milímetros $\equiv$ 10 mm, 1 mm = 10^{-3} m.

En la siguiente Tabla se indican los nombres de las potencias de diez más utilizadas en la literatura científica.

Potencias y sus Denominaciones					
Potencia	Prefijo	Abreviación	Potencia	Prefijo	Abreviación
10^{24}	yotta	Y	10^{21}	zeta	Z
10^{18}	exa	E	10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T	10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M	10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h	10	deca	de
10^{-1}	deci	d	10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m	10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n	10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f	10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z	10^{-24}	yocto	y

Conviene mencionar también un sistema de unidades no decimal cuyo uso está prácticamente restringido a los Estados Unidos: el *Sistema Técnico Inglés*. Su unidad fundamental de longitud es la **pulgada** = 2,54 cm, cuyas equivalencias son 1 *pie* = 12 pulgadas = 1/3 yarda $\simeq$ 0.3048 m.

III.1.4. Masa

El **kilógramo** (kg) se define como la masa de un cierto cilindro de Platino e Iridio que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. Un kilógramo es aproximadamente igual a la masa de 1000 centímetros cúbicos de agua, a una temperatura de aproximadamente $4^\circ\, C$, donde su densidad alcanza el valor máximo.

Ejemplos de unidades del Sistema Internacional expresadas en base a las unidades fundamentales son: fuerza, $1\, newton \equiv 1\, N = 1\, kg\, m/s^2$ y la unidad de energía, $1\, joule \equiv 1J = 1\, kg\, m^2/s^2$.

Cuando nuestro estudio se extienda a áreas de la física, más allá de la mecánica, necesitaremos agregar otras unidades fundamentales. En el sistema internacional (*SI*) estas son: la unidad de temperatura (el grado Kelvin, ^{o}K), la unidad de intensidad luminosa (la candela (cd)), la unidad de corriente eléctrica (el Ampere (A)) y el mol de substancia ($N_A \equiv$ Número de Avogadro = $6{,}022137 \times 10^{23}$ partículas).

Unidades SI Nombres y Símbolos Especiales				
Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresiones derivadas	En Unidades SI Básicas
Frecuencia	Hertz	Hz		s^{-1}
Fuerza	newton	N		$m\,kg\,s^{-2}$
Presión	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\,kg\,s^{-2}$
Energía Trabajo	joule	J	$N\,m$	$m^2\,kg\,s^{-2}$
Potencia	watt	W	J /s	$m^2\,kg\,s^{-3}$

III.2. ANALISIS DIMENSIONAL

Considere una cierta expresión física, la aceleración, por ejemplo. Si multiplicamos la aceleración por el cuadrado del tiempo y por (1/2): $(a\,t^2)/2$, las dimensiones de esta nueva expresión se multiplican tal como sus componentes: $(L/T^2)\,(T^2)\,(1) = [L]$. La dimensión de esta expresión es **longitud** que indicamos con una **L** entre paréntesis cuadrados, según la convención. Note que un número (1/2 en este caso) no tiene dimensiones. Esperábamos este resultado porque indica la distancia recorrida con aceleración constante con una cierta velocidad inicial.

En general, dada una expresión algebraica, las unidades de los términos que la componen son tratadas (se multiplican o dividen o suman...) de la misma manera que los números asociados a cada uno de los términos. Por ejemplo, si en una ecuación se suman (o restan) dos cantidades, ambas debe tener las mismas unidades. No se puede sumar peras con manzanas. Al multiplicar o dividir dos cantidades, sus dimensiones se multiplican o dividen, según sea el caso. Para ilustrar esto, consideremos la distancia que recorre un objeto al ser sometido a una aceleración constante $a = 2\ m/s^2$ durante 0,1 horas, con una velocidad inicial de 5 m/s. La distancia d se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d = v_o\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 5[m/s]\,360[s] + \frac{1}{2}\,2\,\frac{m}{s^2} \times \left(0{,}1\,hora \times\ 3600\,\frac{s}{hora}\right)^2 = 1{,}800\,m + 129{,}600\,m,$$

aquí, la aceleración se ha multiplicado por un factor que tiene dimensiones de $(tiempo)^2$. En la segunda igualdad se realiza la conversión de horas a segundos y en esa operación, las unidades son tratadas como una cantidad algebraica. Esto es importante, las dimensiones deben estar expresadas en la s mismas unidades. No puedo usar horas y multiplicarla por segundos. En ese caso la unidad de medida (segundo, metro...) queda indefinida.

Conviene recalcar que cuando se suman o restan términos en una ecuación, todos ellos deben tener la misma dimensión y estar expresados en las mismas unidades.

Así por ejemplo, si v es una velocidad y t es el tiempo, la siguiente ecuación está *dimensionalmente incorrecta*:

$$y = v\,t + v\,t^2$$

pues, el término $[v\,t]$, tiene dimensiones de [longitud/tiempo] $\times$ [tiempo] = [longitud], en tanto que las dimensiones de $[v\,t^2]$ son [longitud/tiempo] $\times$ [(tiempo)^2] = [longitud] $\times$ [tiempo].

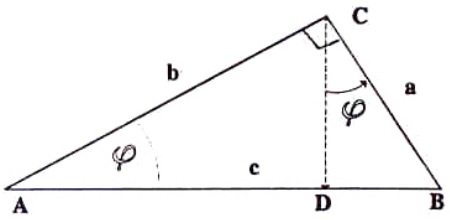
A menudo el análisis dimensional permite detectar errores de cálculo. Por ejemplo, si la propiedad que está siendo evaluada es la energía, el resultado debe tener dimensiones de $masa \times (velocidad)^2$ (en el Sistema Internacional de Unidades , $kg \times (m/s)^2$). Análogamente, al evaluar un área, el resultado debe tener dimensiones de $(longitud)^2$. Si esta condición no se cumple, significa que existe un error en el cálculo.

Ejemplo

Recordemos que para construir un triángulo basta conocer un lado y dos de los ángulos adyacentes a él. Con estos datos el triángulo queda totalmente determinado.

Usando este hecho y el análisis dimensional, compruebe el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.

Como en este caso se trata de un triángulo rectángulo, sólo necesitamos conocer un lado y uno de sus ángulos adyacentes, puesto que el restante es el complemento del anterior. Por otra parte, sabemos que el área de un triángulo debe tener las dimensiones de longitud al cuadrado.



Es posible entonces escribir una fórmula para el área de un triángulo rectángulo, de la siguiente forma:

$$\text{Area del triángulo } \Delta\,ABC \equiv A_c = c^2\,f(\varphi),$$

donde c es el lado del triángulo rectángulo y φ es el ángulo adyacente. Esta fórmula no especifica la función $f(\varphi)$ y sólo se sabe que debe ser una cantidad adimensional, de acuerdo a los resultados de esta sección.

Además, debe ser una *fórmula de validez general*, puesto que a partir de esos dos elementos: c y φ, el triángulo rectángulo queda determinado, es único, y por lo tanto su área debe depender solamente de estos dos valores, de forma que al variar uno de ellos, se modifica el triángulo y, en consecuencia, cambia el valor de su área.

Si Ud. recuerda sus cursos de geometría, probablemente conoce de varias fórmulas para determinar el área de un triángulo, siendo la más simple, y por ello la más usada, el producto de la altura por la base dividido por dos. La fórmula propuesta más arriba es sin duda una de las expresiones menos usadas para evaluar el área de un triángulo.

Como es una expresión general, se aplica también al triángulo $\Delta\, ACD$, con la misma función $f(\varphi)$. Más aún, también es válida para el triángulo $\Delta\, CBD$. En resumen,

$$\text{Area } \Delta\, ACD \equiv A_b = b^2\, f(\varphi), \qquad \text{Area } \Delta\, CBD \equiv A_a = a^2\, f(\varphi),$$

y como el área del triángulo ABC, A_c, es la suma de las áreas A_a y A_b, se obtiene que:

$$A_c = A_a + A_b \quad \Longrightarrow \quad c^2\, f(\varphi) = a^2\, f(\varphi) + b^2\, f(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Ahora es fácil determinar la función $f(\varphi)$ usando la fórmula usual para el área de un triángulo:

$$c^2\, f(\varphi) = \frac{a\, b}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(\varphi) = \frac{a\, b}{2\, c^2} = \frac{\cos\, \varphi\, \text{sen}\, \varphi}{2}. \; \square$$

Ejercicio

Una pelota se lanza con velocidad horizontal v, desde una altura H, medida desde la superficie de la Tierra. La distancia horizontal que recorre la pelota hasta el momento en que choca contra el suelo es R. Se sabe que la partícula se mueve bajo la acción de la aceleración de gravedad $g = 9{,}8\ m/s^2$. Usando análisis dimensional encuentre una expresión para R en función de H, v y g.

Ejercicio

Unidades Geometrizadas. A partir de las constantes universales de gravitación G, de la velocidad de la luz en el espacio vacío c, y de Planck h, es posible construir unidades fundamentales de longitud L^*, masa M^* y tiempo t^*.

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg\ s^2}\right], \qquad c = 2{,}9979 \times 10^{8} \left[\frac{m}{s}\right], \qquad h = 6{,}6261 \times 10^{-34} \left[\frac{kg\ m^2}{s}\right].$$

Construya las unidades L^*, M^* y t^*, combinando adecuadamente las constantes universales mencionadas.

Ejercicio

Un experimentador encuentra que en ciertas condiciones la altura de un cuerpo sobre la superficie de la tierra varía con el tiempo t, de acuerdo a la ecuación:

$$z(t) = a + b\, t + c\, t^2$$

i) ¿Qué dimensiones tienen las constantes a, b y c ?

ii) ¿Cuál es el significado físico de cada una de estas constantes?

III.3. FISICA, MATEMATICAS Y COMPUTACION

La Geometría es una herramienta importante en la formulación y análisis de los problemas que nos interesa estudiar en física, así como también lo es el cálculo diferencial. De hecho, este último fue desarrollado por Newton –simultáneamente con Leibnitz–, para expresar sus leyes en forma precisa. Hemos incluido un complemento matemático donde repasamos brevemente los conceptos básicos de trigonometría y nociones de series, haciendo énfasis en las aproximaciones y en el cálculo del área encerrada bajo una curva, que son los procedimientos más requeridos en los problemas que estudiaremos en este libro.

Al final de esta sección se incluye un conjunto de ejercicios relacionados con esta materia.

La definición de derivada se incorporó junto con la introducción de velocidad, en el segundo capítulo.

Con respecto a las ciencias de la computación, es claro que en los últimos veinte años, la investigación, la ingeniería y la enseñanza han sido paulatinamente influenciadas por ella. Su impresionante desarrollo ha permitido resolver problemas muy importantes de Física e Ingeniería y continúa abriendo nuevas líneas de investigación en diferentes áreas del conocimiento. El computador se ha transformado en una herramienta de trabajo esencial en casi todos los aspectos de la sociedad moderna. En particular, aquellos problemas científicos o tecnológicos que se tornan muy difíciles o imposibles de resolver por métodos analíticos, pueden normalmente ser abordados numéricamente.

A pesar de la importancia del cálculo numérico, sólo será tratado ocasionalmente en este curso introductorio.

III.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES

Utilizaremos ahora una estrategia diferente: analizaremos un problema del cual no tenemos toda la información requerida. Estimaremos, lo mejor posible, los datos que no conocemos para obtener una solución que nos parezca razonable.

Este tipo de ejercicios fueron popularizados por Enrico Fermi (1901-1954) (Premio Nobel en 1938), destacado físico de origen italiano, dotado de una habilidad innata para encontrar respuestas aproximadas a problemas complejos, sin recurrir a cálculos elaborados.

Lo que se pretende es obtener una respuesta para un problema determinado, cuya solución exacta, de existir, requeriría gran cantidad de trabajo, ya sea para calcular o bien para recolectar la

información necesaria para realizar los cálculos.

El ejemplo con que ilustramos este método, fue planteado por el propio Fermi a sus estudiantes en la Universidad de Chicago. Les pidió estimar el número de afinadores de piano que trabajaban en la ciudad de Chicago.

La primera impresión es que la pregunta no puede ser respondida pues falta mucha información; sin embargo, al analizar la situación es posible darse cuenta que se puede llegar a una estimación razonable acerca del número pedido. Una forma de hacerlo es comenzar por estimar la población de la ciudad de Chicago, digamos: cinco millones de habitantes (es una ciudad como Santiago). Si suponemos que en promedio una familia está formada por cuatro personas, eso da un total de 1.250.000 familias. Además, si una de cada cinco familias posee un piano, entonces deberían haber del orden de 250.000 pianos en Chicago. Si consideramos que cada piano es afinado aproximadamente cada cinco años, eso da un total de 50.000 afinamientos por año. Ahora bien, un técnico puede dar servicio en forma adecuada a unos 4 pianos diariamente y supondremos que trabaja doscientos cincuenta días al año. Esto significa que para dar servicio a todos los usuarios de Chicago se requieren del orden de $50{,}000/(250 \times 4) = 50$ técnicos. La respuesta es aproximada, pero no se aleja mucho del número de técnicos que aparecen en las páginas amarillas de la guía de teléfonos de la ciudad de Chicago.

Dependiendo de las estimaciones utilizadas durante el desarrollo del cálculo, se podría haber obtenido un número tan bajo como 25 o tan alto como 75, pero ciertamente el número final difícilmente resultará superior a 100. La razón por la cual este tipo de cálculo puede entregar resultados acertados, radica en la cancelación de los errores cometidos en las diversas estimaciones. Si nos excedimos en el número de habitantes de la ciudad de Chicago, es posible que hayamos subestimado la cantidad de pianos atendidos diariamente por un técnico. Es decir, los errores en cada uno de las números considerados, están distribuídos aleatoriamente (i.e., al azar). Por supuesto, el entrenamiento en el arte de resolver situaciones similares, mejora la precisión de las respuestas.

Ejercicio

Repita la estimación anterior para el caso de la ciudad de Santiago. ¿Cómo cambiarían las cifras usadas anteriormente?

Ejercicio

Las ciudades de Nueva York y Los Angeles en USA están aproximadamente a la misma latitud y separadas unos $4500\ km$. Además, se sabe que cuando en Nueva York son las 10 de la mañana, en Los Angeles son las 7 de la mañana. Estime el perímetro de la Tierra sabiendo que ambas ciudades no están muy alejadas del Ecuador terrestre.

Nota: NY está a una latitud de $40^o\ 40'$ y LA a $34^o\ 03'$. para comparar con ciudades en Chile: Valdivia está a $39^o\ 49'$ (sur) y Santiago está a $33^o\ 27'$. La diferencia entre la longitud entre estas dos ciudades es pequeña, del orden de dos minutos. En cambio la diferencia en longitud entre NY y LA es de aproximadamente44^o. Conviene considera en este problema la ciudad de Wilmington

en North carolina que tiene prácticamente la misma longitud de NY, por tanto la misma hora. Ciertamente no es reconocida por todos. **Ejercicio**

Un dígito binario recibe el nombre de *bit*. Un grupo de *bits* se denomina una *palabra*. Una palabra de ocho bits recibe el nombre de *byte*. Una letra normal cualquiera está representada en lenguaje binario por un *byte*. Suponga que se dispone de un disco de computador con capacidad para $100\ Megabytes$. Estime el número de libros que podrían ser almacenados en ese disco.

III.5. Comparación de la presión en diferentes situaciones

III.5.1. ¿Qué es la presión?

Las definiciones en física son circulares. La presión, en dimensiones, representa una densidad de energía, pero esta definición no tiene asidero en un fenómeno sensorial. Definida como fuerza por unidad de superficie, apela directamente a la experiencia diaria y puede parecer más concreta y relevante. La fuerza y la superficie son cotidianos.

Por ejemplo para sostener una columna de altura **h** cualquier material que mantenga en forma estable dicha forma cilíndrica, debo aplicar una fuerza por unidad de superficie (presión) en la superficie basal igual a

$$P = \rho g h, \quad \left[\frac{M}{L^3}\right] \times \left[\frac{L}{T^2}\right] \times [L] \equiv [Pascal].$$

Esto es válido en un fluido como la atmósfera, como en la la fuerza que ejerce una columna de cemento sobre la superficie que la sostiene.... .

El valor de la presión del aire sobre nuestras cabezas -la presión atmosférica-, es el peso del aire sobre nuestras cabezas por unidad de superficie: 1,013 $\times$ 10^5 Pa.

1 cm de agua a 4^o celsius , genera una presión de 9,81 $\times$ 10^1 Pa.
Una columna de un cm de Hg genera una presión de 1,33 $\times$ 10^3 Pa.

III.5.2. El ala de un Boeing Jumbo

Examinemos el caso del ala de un avión. El Boeing 747-400 es un ejemplo de máquina eficiente y de calidad, a juzgar por su presencia en las líneas aéreas y su longevidad.

Veamos algunos datos[1]

[1]"The Simple Science of Flight"From insects to Jumbo Jets"

Superficie del ala de un Boeing 747-400 : 511 m^2.

Masa al despegar : 360 Toneladas.

Contenido de Energía de la gasolina: $4,8 \times 10^7 J/kg$.

Consumo promedio : $12 \times 10^3 \ell/h$.

Densidad de la gasolina: $0,8 kg/\ell$.

Velocidad del crucero: $900 km/h \simeq 250 m/s$.

A partir de estos datos haremos algunas comparaciones para poder evaluar, por ejemplo, la eficiencia de esta máquina, y así tener una idea si efectivamente es alta o baja. Esto se debe precisar comparando con otros medios más conocidos para nosotros, por ejemplo los automóviles.

Los números que se obtienen a continuación llevan una dósis de sentido común: son aproximaciones razonables, no son exactos. Son estimaciones.

El peso del avión durante el vuelo es sostenido por la presión actuando sobre la superficie de las alas. Sabemos la fuerza que se debe sostener, aproximadamente $3, \times 10^5 kg \times 10 m/s^2 = 3 \times 10^6$ Newton

$$P \simeq \frac{3 \times 10^6 \text{Newton}}{511\, m^2} \simeq 6 \times 10^3 \ N/m^2 = 6 \times 10^3 \text{Pascal}$$

III.5.3. De personas y autos

¿ Cómo se compara el número anterior con el peso de una persona y la presión que ejerce sobre el piso?

Peso de una persona:

HOMBRE = 80 kg $\times$ 10 = 800 N, MUJER = 60 kg $\times$ 10 = 600 N.

Área del zapato de un hombre $\approx$ 20 cm(largo) $\times$ 7 cm (ancho) $\approx$ 150 cm^2 = 150 $\times 10^{-4} m^2$. Este número debe ser multiplicado por dos. De modo que la presión sobre el piso es :

$$P_{Hombre} \ = \ \frac{800\, N}{3 \times 10^{-2}\, m^2} \ = \ 3,7 \times 10^4 \text{Pascal.}$$

En el caso de una mujer puede depender del tipo de zapato que use. El caso más crítico es el uso de taco alto. La presión sobre el piso aumenta debido a que el área de contacto es menor. Por esta razón en algunos lugares históricos, donde la madera del piso es más bien blanda, está prohibido entrar con tacones altos. Dejan marcas en el piso. Consideremos el área de contacto con taco alto.

$$12(cm) \ \times \ 6(cm) + 2\, cm^2 = 75 cm^2 \simeq 7,5 \times 10^{-3}\, m^2.$$

$$P_{\text{Taco alto}} \simeq \frac{600}{2\,times\,7,5\times\ 10^{-3}} \simeq 4\times 10^4\,\text{Pascal}.$$

Resulta ser similar al de un hombre. Sin embargo en los tacos se puede concentrar más fuerza por unidad de área dependiendo como apoye el pie en el piso. la presión es aproximadamente 6 veces mayor a la que resiste un ala de avión.

¿Cuál es la presión de los neumáticos de una auto pequeño sobre el piso? Presión en un neumático $= 24\ell b - fuerza/(pulgada^2)$

Una libra-fuerza por pulgada al cuadrado (psi en inglés) es igual a 6,9 $\times$ 10^3 Pa [2]

Una libra-fuerza = 4,45 N $\approx$ 4,5 N. Una pulgada al cuadrado es $0{,}025^2 = 6{,}3\times 10^{-4}$ m^2. Dividiendo estas cantidades obtenemos el valor mencionado al comienzo del párrafo.

Calculemos la fuerza en el neumático.

$$\text{Presión en SI } = 24\ \times\ 6,90\ \times 10^3\ \approx\ 1,73\ \times\ 10^5 \frac{\text{Newton}}{m^2}.$$

De esta forma

$$P_{\text{Neumático}}\ \sim\ 1,73\times 10^5\text{Pascal}$$

Si el peso del auto es 600 kg $\times$ 10 [N], cada rueda resiste 1500 N . El área de contacto la estimamos a partir de Fuerza/Presión:

Área = [1,5 $\times$ 10^3]/ (1,73 $\times$ 10^5) $\sim$ 0.9 $\times$ 10^{-2} = 90 $\times$ 10^{-4}.

Si el ancho del neumático es 20 cm, entonces la deformación de la circunferencia al contacto con el piso es aproximadamente 4,5 cm.

Vemos que si un neumático de este auto accidentalmente nos pasa por encima, las presiones son al menos 5 veces más intensas que el pisotón de una persona.

III.5.4. Comparar la Eficiencia de un Boeing, un Auto y un Picaflor

El Boeing 747-400 y el Picaflor

Continuando con más comparaciones. ¿Cuál es la eficiencia de un Boeing? Como referencia usaremos un picaflor y un auto compacto.

Un picaflor consume el equivalente a su propio peso en un día, esto es aproximadamente un 4 % de su peso/hora.

[2] Una buena referencia para unidades y cifras significativas es: **Guide for the use of International System of Units (SI)** de Barry N. Taylor,1995, NIST Special Publications. Está disponible en la red.

Veamos cómo es este número en el caso del Boeing.
El Boeing ocupa 12.000 ℓt/h $\sim$ 12.000 ℓt / h $\times$ 0,8 kg/ℓt $\sim 10^4$ kg/h. Considerando que la densidad del petróleo es 0.8. Para comparar con el 4 % del picaflor, debemos estimar el peso del Boeing. Para ellos tomamos como un valor representativo su peso en la mitad del recorrido de su viaje.

En la mitad de su recorrido tenemos:

$$\frac{10^4 \text{kg/h}}{3,6 \times 10^5 \,\text{kg}} = \frac{1}{36} \sim 0,03,,$$

O sea aproximadamente el 3 % de su peso. Similar, en promedio y dentro de las aproximaciones que hicimos, al de un picaflor! **??**

El Boeing 747-400 y el Auto

Comparemos un Boeing con un auto. Al fin de cuentas ambos son un medio de transporte. Un auto consume en carretera aproximadamente 1ℓt cada 20 km.

Veamos, el Boeing consume 12.000 ℓt / h con una velocidad de V_{Boeing} = 900 km/h. Queremos obtener de acá una cantidad con las dimensiones de [km/ℓt]. Dividiendo, obtenemos 12.000/900 ℓt / h $\cdot$ km/h $\sim$ 13 litros por km, o 1 ℓt cada 0,07 km/ ℓt.

El Boeing sale con una mala evaluación al compararlo en estas circunstancias con el auto. Sin embargo hay una gran diferencia: el Jumbo lleva 400 pasajeros! Es más representativo calcular el gasto por km y por pasajero. Calculemos esta cantidad entonces: ℓt/(km $\times$ pasajero).

Auto con 4 pasajeros:

$$\frac{1\,\ell t}{20km \times 4} = \frac{1}{80} = 0,012 \frac{\ell t}{km \times \text{pasajero}}.$$

En el caso del Boeing:

$$\frac{1}{0{,}07 \times 400} = \frac{1}{30} = 0,03 \frac{\ell t}{km \times \text{pasajero}}$$

Vemos que el Boeing se acerca al rendimiento por pasajero de un auto. Podríamos continuar con la estrategia de cálculo y considerar, por ejemplo, el ahorro de tiempo. Dada que la velocidad de crucero del avión supera largamente la del auto. Pero dejamos estos cálculos como ejercicio y concluimos que el Boeing 707-400 es realmente una joya mecánica.

III.5.5. Efectos de Escala en Biología

Brevemente mencionamos una relación que podemos inferir a partir del volumen (tamaño) de los animales y la superficie que los envuelve. Hay otras preguntas que se pueden estudiar considerando la escala en el tamaño de los animales y las necesidades fisiológicas (la física). Por ejemplo: Cuál es el mayor tamaño que puede alcanzar un animal y que aún pueda volar, Por qué los grandes animales tienen piernas rectas...

El análisis dimensional señala

$$A = L^2, \quad \text{y que} \quad V = L^3 \quad \text{de modo que} \quad A = V^{2/3}. \tag{III.1}$$

Esto es válido para comparar el área de un cubo, de una esfera, con su respectivo volumen. La comparación es válida para cuerpos isométricos: aquellos que tienen distinto tamaño pero mantienen la misma forma, por ejemplo en el caso de cilindros isométricos donde su altura H es igual a su radio r.

$$A_{\text{cil}} = 4\,\pi\,r^2 \quad \text{y} \quad V_{\text{cil}} = r^3, \quad \text{se tiene} \quad A_{cil} \propto V_{cil}^{2/3}.$$

Las comparaciones que siguen se refieren entonces sólo a animales isométricos, aquellos que aproximadamente son geométricamente similares pero que difieren entre ellos en tamaño[3] .

Note que esto justifica las estimaciones que se hacen acerca del metabolismo de una vaca y que comienzan con la suposición, un poco fuerte: Sea una vaca esférica. Es un asunto, como vemos, de isometría.

Cuando comparamos animales es muy difícil medir el volumen. Más fácil es medir la masa. Suponemos que todos los animales tiene una densidad parecida y podemos escribir

$$A \propto M^{2/3}. \tag{III.2}$$

Esta es la relación que buscamos. A mayor tamaño (masa en este caso) la superficie **externa** aumenta más lentamente. Sin embargo, el cuerpo requiere de mayor intercambio con el medio, oxígeno, calor... que es proporcional a su masa. La naturaleza resuelve este problema creando otras superficies, como ilustramos a continuación con un par de ejemplos numéricos.[4]

Consideremos el tronco de un árbol. Al crecer tiene más masa y requiere un mayor intercambio de gas con el exterior. Para lograrlo y vencer la relación entre área y volumen, tiene hojas. Un naranjo posee aproximadamente 2000 hojas. Cada una de ellas tiene cavernas internas en cuyas paredes ocurre el intercambio fotosintético entre las células y el gas externo. Estas cavernas multiplican de diez a treinta veces la superficie de las hojas. La estimación del área de las hojas es de 20 m^2, de modo que la superficie real del naranjo es de 600 m^2.

En nuestro caso podemos considerar los pulmones para el intercambio de gases o nuestro sistema digestivo para el caso de la alimentación.

[3] Ver Newton Rules Biology.

[4] Ver Life's Devices.

En el caso de los pulmones, tienen una capacidad de aproximadamente 6 litros. este volumen está rodeado por una superficie que contiene 30.000.000 de alveolos, que le confieren una superficie de 50 a 100 m^2, el equivalente a un departamento o casa mediana.

Algo similar ocurre con el intestino delgado que tiene aproximadamente 7 m de largo pero que multiplica su superficie con las mini-protuberancias que tiene.

Ejercicio

Considere dos personas de diferente tamaño pero de idéntica contextura: estructura ósea y musculatura.

Si ambos están en un gimnasio y hacen flexiones elevando su cuerpo hasta que su mandíbula toque la barra horizontal: ¿A cuál de las dos personas se le hace más fácil este ejercicio?

III.6. EJERCICIOS

1.– Estime cuántos trabajadores se necesitaron para construir una pirámide. Necesita recolectar datos como la densidad de las piedras, el tamaño de las pirámides, cuánto trabajo puede hacer un hombre en un día, la energía potencial de la pirámide y hacer algunas suposiciones como la siguiente: dónde se encontraban las piedras utilizadas.

Referencia: **Juegos Matemáticos**, Ian Stewart, Ïnvestigación y Ciencia", Noviembre 1998, pág. 86.

2.– Benjamín Franklin notó que al dejar una gota de aceite en la superficie de un lago, ésta no se esparcía más allá de una cierta superficie. También notó que si el número de gotas de aceite se aumentaba al doble, el área cubierta también se duplicaba. Concluyó que dicho valor era el máximo posible que una cierta cantidad de aceite lograba extenderse. Al realizar el experimento notó que 0,1 cm3 de aceite cubrían un área de aproximadamente 40 cm^2. ¿De qué espesor es la capa de aceite?

Si la distancia entre átomos de una molécula en un líquido o gas corriente es de $1A^o$=10^{-10} m. En el tipo de aceite que Franklin usó se puede suponer que cada molécula tenía 10 átomos.
¿De cuántos átomos de espesor era la película de aceite formada?

3.– Una hoja de papel tipo carta, es doblada por la mitad, de esta manera el área resultante es la mitad y el espesor es el doble de la hoja original. Si este proceso se repite sucesivamente con la hoja resultante,
Estime el número de veces que se debe doblar una hoja para que el espesor cubra la distancia

que separa a la tierra de la Luna.
Calcule el área de la hoja resultante al final del proceso. Compare este número con el tamaño de un átomo.

Ver artículo en U-Cursos.

4.– En un tablero de ajedrez hay 8x8 casilleros. En el primero de ellos se pone un grano de maíz; en el segundo el doble del anterior; en el tercero el doble del anterior, y así sucesivamente. Calcule el número aproximado de granos de maíz que se requieren para toda la operación y estime su volumen. Compárelo con el volumen de la Tierra.

5.– Considere la longitud de la línea que Ud. puede marcar con un lápiz de pasta nuevo, antes de agotar totalmente su tinta.

6.– Los siguientes ejercicios ilustran cómo funciona la aproximación $(1 + x)^r \approx 1 + r\,x + O(x^2)$). Mientras más pequeño sea $|x|$ con respecto a la unidad, mejor es la aproximación. Estime (sin usar la calculadora) el valor de las siguientes expresiones (use donde corresponda $\pi \approx 3,14$). **Después** compruebe el resultado con una calculadora o su PC:

a.- $\sqrt{1,001}$, b.- $\sqrt{0,98}$, c.- $\sqrt{102}$, d.- $\sqrt{\pi}$, e.- $\sqrt{2}$, f.- $\sqrt{60,5}$, g.- $1/\pi$, h.- π^2.

7.– Haciendo uso de la misma aproximación de la pregunta anterior, calcule los siguientes cuocientes:

a.- 1/101 b.- $\dfrac{905}{77}$, c.- $\dfrac{303}{201}$, d.- $\dfrac{\sqrt{50}}{709}$, e.- $\dfrac{301}{802}$, f.- $\dfrac{\sqrt{89}}{0,013}$.

III.7. Bibliografía

1.- **Guide for the use of International System of Units (SI)** de Barry N. Taylor,1995, NIST Special Publications. Una buena referencia para unidades y cifras significativas. Está disponible gratis en la red.

2.- **The Simple Science of Flight:** From Insects to Jumbo Jets, Henk Tennekes, The MIT Press, Massachusetts,Third Printing 1998.

3.- **Newton Rules Biology:** A physical Approach to Biological Problems. C. J. Pennycuik, Oxford University Press, 1995 Reprinted.

4.- **Biology by Numbers:** An Encouragement to Quantitative Thinking, R. F. Burton, Cambridge University Press, 1998.

5.- **Life's Devices:** The Physical World of Animals and Plants, Steven Vogel,Princeton University Press, 1988. (Existe una versión revised de este libro).

6.- **Scaling in Biology**, A. J. Spence, *Current Biology* Vol. 19,# 2, R57, R61.

Capítulo IV

CINEMATICA EN 1-DIMENSIÓN

IV.1. INTRODUCCIÓN: GRÁFICOS

La descripción matemática de la trayectoria de un objeto es lo que denominamos *cinemática*. En este capítulo estudiaremos el movimiento de una partícula en *una dimensión*: la partícula se mueve a lo largo de una línea recta.
Este ejemplo es el más básico, pero utiliza todas las ideas de la cinemática en dos y tres dimensiones.

Cuando nos referimos a una partícula, queremos decir que un objeto como un auto, un bloque o una persona, lo identificamos mediante un único punto asignado convenientemente. En adelante, el objeto es el punto.

Un ejemplo: en la descripción del movimiento de la Tierra en torno al Sol, la distancia relevante es la distancia Tierra–Sol, si el tamaño de la Tierra no es relevante, no se considera.

Este movimiento a lo largo de una línea recta, se asocia con el eje de los números reales. La elección de un origen divide a esta recta en dos zonas: sector positivo, a la derecha del origen y, negativo a la izquierda.

La *coordenada* es un número real que se asocia con la posición de la partícula y que corresponde a la posición de la partícula sobre la recta real en un instante dado. Debemos, en general, especificar dicho instante. La descripción de este movimiento se completa cuando conocemos la posición en la línea de los reales y el tiempo asociado con dicha posición. Esto lo denotamos por $x(t)$: la posición que tiene una partícula en cada instante de tiempo **t**. Es la *función* x de t.

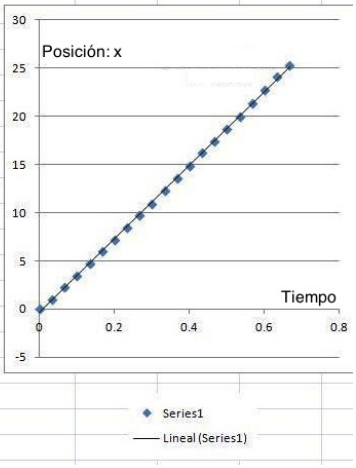
En el laboratorio, sólo se logra determinar la posición de la partícula en determinados instantes. En estos casos el movimiento se describe mediante una *tabla de valores*.

Para estudiar un movimiento creamos un *grafico*. Consiste en ubicar puntos en un sistema de dos ejes perpendiculares, como el que se indica en la Figura. Los valores del tiempo de la Tabla: la primera columna con el tiempo **t** se localizan en el eje horizontal *(abcisa)*. En el eje vertical, instalamos el valor de la posición correspondiente a ese instante, con el valor que aparece en la

segunda columna, la *(ordenada)* y la denominamos el eje -x.

Una mirada a un gráfico, permite obtener una gran cantidad de información.

	TIEMPO	DISTANCIA
1	0	0
2	0.034	1
3	0.067	2.238
4	0.1	3.429
5	0.134	4.714
6	0.167	6
7	0.2	7.19
8	0.234	8.476
9	0.267	9.713
10	0.3	10.951
11	0.334	12.285
12	0.367	13.523
13	0.4	14.856
14	0.434	16.189
15	0.467	17.427
16	0.5	18.665
17	0.534	19.95
18	0.567	21.331
19	0.6	22.759
20	0.634	24.094
21	0.667	25.33



Cuando una tabla de datos contiene muchos puntos podemos intentar unirlos por una recta u otra curva conocida. A cada valor de **t** le corresponde un valor de **x** y así obtenemos lo que se denomina una función **x = x(t)**.

Generalmente existe una dispersión en los datos y no es posible dibujar una curva conocida **x = f(t)** que pase por todos y cada uno de los puntos. En este caso se puede ajustar una curva elemental –una curva que tenga una expresión analítica simple–, que se aproxime lo más posible a cada uno de los datos.

Existen procedimientos conocidos que realizan esta tarea y que son usados en el laboratorio. No nos referimos a este tema.

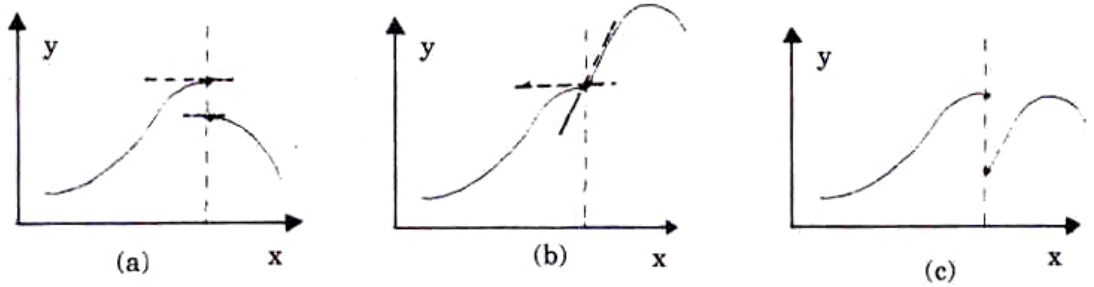


Figura IV.1: *Una curva es suave si la función y su tangente cambian en forma continua. En caso que existan discontinuidades de la curva (a), o su tangente (b), o ambas simultáneamente (c), debemos analizar cada tramo por separado.*

Un ejemplo cuyo resultado se expresa mediante una función elemental, como polinomios, funciones trigonométricas..., constituye el caso ideal para ser analizado en detalle.

En algunos casos debemos recurrir a los métodos numéricos para resolver el problema.

Comenzaremos estudiando las curvas más simples y que se usan con mayor frecuencia: la línea recta y la parábola.

IV.2. GRÁFICOS

IV.2.1. Ecuación de la recta.

La siguiente ecuación representa una línea recta:

$$y = mx + n. \tag{IV.1}$$

Con los parámetros m y n es posible caracterizar a cualquier línea trazada en el plano.

Sabemos que dos puntos determinan completamente una recta. Basta marcar los dos puntos en la Figura IV.2 y enseguida trazar con una regla una línea recta a través de ellos.

Para encontrar la relación entre los valores de m y n y las coordenadas x_P, y_P y x_Q, y_Q de los puntos P y Q, elegimos la ubicación de estos puntos de manera que simplifiquen el álgebra.

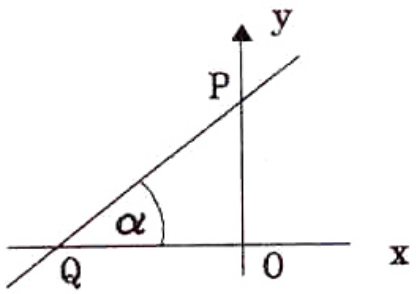


Figura IV.2: *Las coordenadas de los puntos P y Q determinan los parámetros m y n de la recta. Las coordenadas del punto P son los valores x_P e y_P, que se obtienen trazando por P una paralela a la ordenada y a la abcisa respectivamente.*

Como el punto P pertenece a la recta, obedece la ecuación IV.1 de forma que se cumple que: $y_P = m\,x_P + n$.

De la Figura IV.2 se sabe que $x_P = 0$, puesto que su proyección sobre el eje x coincide con el origen y por tanto el número asociado es precisamente 0. Al reemplazar este valor en la ecuación de la recta anterior obtenemos $y_P = n$.

Un razonamiento similar indica que: $y_Q = 0 = m\,x_Q + n$ para el punto Q. De modo que $x_Q =$

$-n/m$. Si relacionamos esta última ecuación con el valor de la coordenada $y_P = n$, obtenemos:

$$m = \frac{y_P}{-x_Q} > 0, \quad \text{puesto que } x_Q < 0.$$

Recordando la definición de tangente del capítulo anterior, descubrimos que m es precisamente la tangente del ángulo α en el triángulo $\triangle QOP$.

La generalización de esta definición para cualquier par de puntos 1 y 2 es la siguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \textit{pendiente de la recta.} \qquad \text{(IV.2)}$$

Ejercicio

Demuestre que esta definición generalizada de m, coincide con el valor obtenido para m en el caso particular de la Figura IV.2. □

Algunos casos particulares de la ecuación de una recta.

Si ponemos $n = 0$, la ecuación IV.1 queda: $y = mx$, y representa una recta que pasa a través del origen.

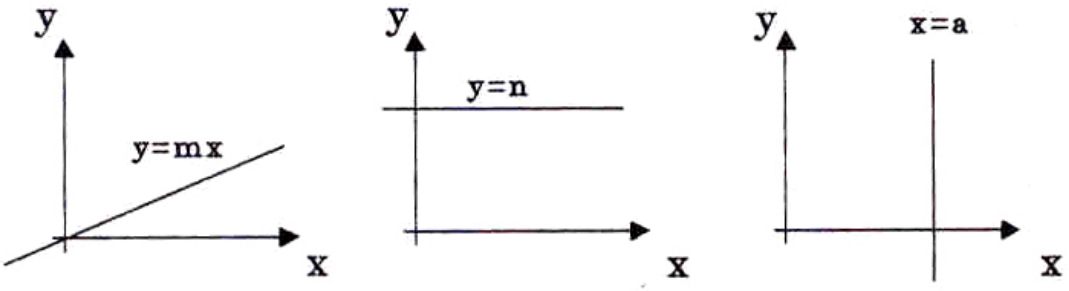


Figura IV.3: *Ejemplos de la ecuación de una recta. Cada una de las Figuras representa un caso particular de las ecuaciones estudiadas.*

Si $m = 0$, la pendiente de la recta es nula y por tanto es paralela al eje x. En este caso $y = n$, independiente del valor asignado a x.

Otro caso particular es la ecuación $x = a$. Esta ecuación corresponde a una recta perpendicular al eje x que lo corta en el punto $x = a$. En rigor, esta ecuación no es una función: no queda definido cómo asociar en forma única un sólo valor de y al punto x=a.

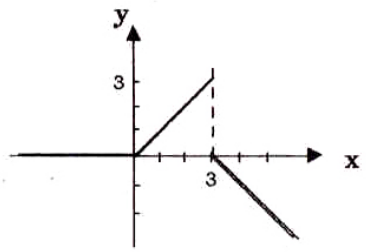
En algunos ejemplos de cinemática, la pendiente de una función –o la función misma– sufren un salto repentino. *En estas situaciones, cada discontinuidad señala el comienzo de una nueva ecuación para la recta.* A continuación se incluye un par de estos casos.

Ejemplo

$$y = 0 \quad x \leq 0,$$

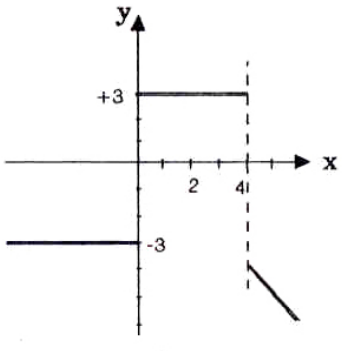
$$y = x \quad 0 \leq x \leq 3,$$

$$y = -x + 3 \quad x > 3.$$



a) En $x = 0$ la función es continua pero la *pendiente* es discontinua. En $x = 3$ se produce una discontinuidad de la función y de la pendiente.

b) Otro caso del mismo tipo es:



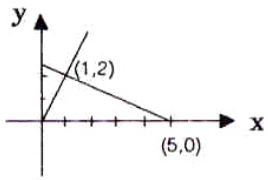
$$y = -3, \quad \text{para} \quad x < 0,$$

$$y = +3 \qquad 0 \leq x < 4,$$

$$y = -x \qquad x \geq 4.$$

Ejercicio

Escriba la ecuación correspondiente a cada uno de los lados del triángulo rectángulo de la figura adyacente.□



IV.2.2. La parábola.

La ecuación de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{IV.3}$$

Los valores que toman los parámetros a, b y c determinan las distintas formas que adopta la parábola. Algunos de estos casos se incluyen en la Figura IV.4.

La intersección de la parábola con el eje x (cuya ecuación es $y = 0$) son las raíces de la ecuación cuadrática. Cuando la parábola no corta al eje x, las dos raíces son números complejos conjugados. Cuando la toca en un solo punto, las dos raíces de la ecuación son iguales.

Familiarizarse con el gráfico de una parábola es fundamental. El movimiento de una partícula sometida a una aceleración constante –por ejemplo, en caída libre sobre la superficie de la tierra–, queda descrito precisamente por esta curva.

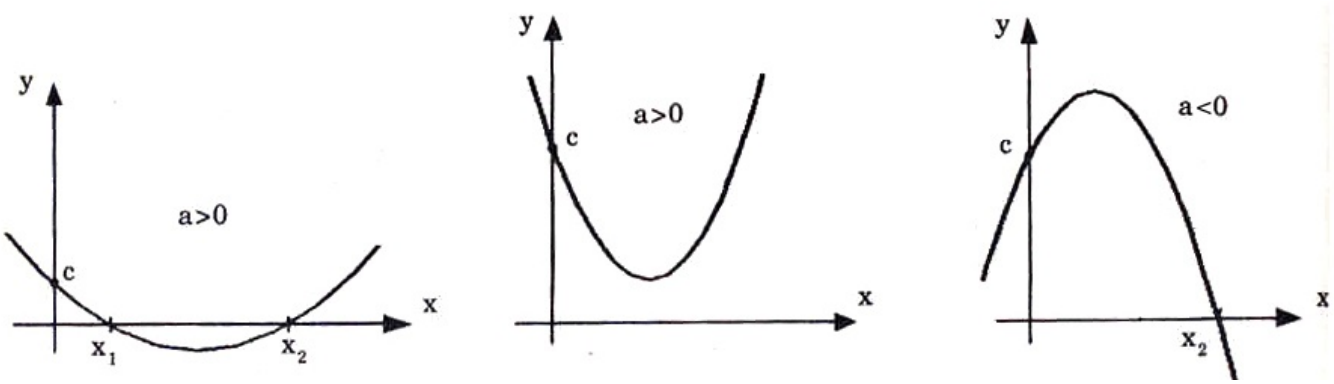


Figura IV.4: *Significado geométrico de a, b y c.* $a > 0$*: indica concavidad (* $\bigcup$*),* $a < 0$*: convexidad (* $\bigcap$*). c: indica la coordenada del punto donde la parábola corta a la ordenada y b la pendiente en dicho punto.*

$$\forall\, a,\ [b^2 - 4\,a\,c] > 0, \quad y = \ ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{posee dos raíces reales: } x_1,\ x_2;$$

$$\forall\, a,\ [b^2 - 4\,a\,c] < 0, \quad y = \ ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{dos raíces complejas: } z_1,\ z_1^*\,;$$

$$\forall\, a,\ [b^2 - 4\,a\,c] = 0, \quad y = \ ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{dos raíces reales iguales: } x_1 = x_2.$$

($\forall \equiv$ para todo).

Ejemplo

Encontrar las coordenadas de los puntos donde una recta intercepta una parábola. La ecuación de la parábola es $y = -x^2 + 2$ y la recta obedece a la ecuación $y = x$.

La intersección de las dos curvas indica que ambas tienen al menos un punto en común, llamémosle P. Como el punto pertenece a ambas curvas, sus coordenadas, x_P e y_P, deben satisfacer las ecuaciones de ambas curvas simultáneamente. En P se cumple entonces que:

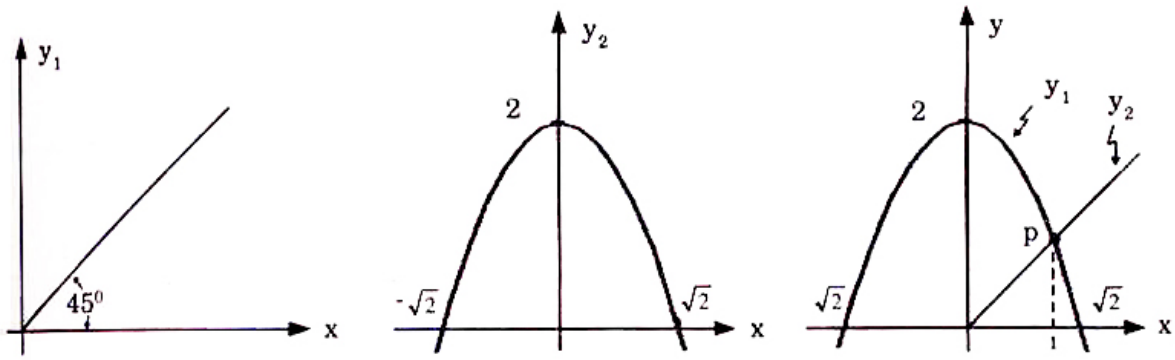


Figura IV.5: *A la izquierda se dibujan los gráficos de la recta y la parábola, con las letras y_1 e y_2. A continuación se superponen ambos gráficos. En el ejercicio se pide encontrar las coordenadas de los puntos de intersección.*

Ecuación de la recta:	Ecuación de la parábola:	Las coordenadas (x_P, y_P) del punto P deben cumplirse para la ecuación de la recta y de la parábola. Entonces:
$y = x,$	$y = -x^2 + 2,$	$\Longrightarrow \quad x = -x^2 + 2.$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son: $x_P = 1 = y_P$, y $x_Q = -2$, $y_Q = -2$.

Ejercicio

Grafique el polinomio $y = x^3 + b\,x + c$, para distintos valores de b y c, hasta obtener una combinación tal que solo exista *una* raíz real para la ecuación cúbica.

Indicación: Recuerde que las raíces de un polinomio se obtienen poniendo y = 0. Por ejemplo, si $c = 0$ y $b < 0$, entonces existen tres raíces reales, un de ellas es $x = 0$ y las otras dos son $x = \pm\sqrt{-b}$. Examine a continuación qué sucede con $b \geq 0$. □

IV.3. VELOCIDAD

IV.3.1. Velocidad constante.

Como mencionamos anteriormente, iniciamos el estudio de la trayectoria de los cuerpos restringiéndonos a movimientos en una dimensión.

Para determinar la posición que ocupa el móvil en cada instante, usamos una línea recta, cuyos puntos identificamos con los números reales. Esta es la coordenada del cuerpo en movimiento.

Aún en el caso que dibujemos el móvil con sus dimensiones correspondientes, el cuerpo efectivamente estará representado sólo por un **punto**, de esta forma no existe ambigüedad al identificar la posición del cuerpo con el número real correspondiente a su coordenada.

Para describir el movimiento podemos usar una Tabla, como la mostrada al comienzo del Capítulo, que contenga en una columna el tiempo y a su derecha la posición en dicho instante.

Otra manera de representar esta trayectoria, es mediante un gráfico.

Línea recta

La representación gráfica es útil para visualizar las propiedades de la trayectoria de una partícula. La Tabla de Datos se usa de preferencia en los Laboratorios para guardar información.

Usualmente en un gráfico se asigna la variable independiente, el tiempo en este caso, al eje horizontal y la variable dependiente, la posición, al eje vertical.

A continuación analizaremos con detalle el significado de una línea recta en un gráfico *distancia* vs. *tiempo*. Comenzamos con la siguiente afirmación:

> *El gráfico más simple de distancia versus tiempo, es una línea recta y representa una partícula viajando con velocidad constante.*

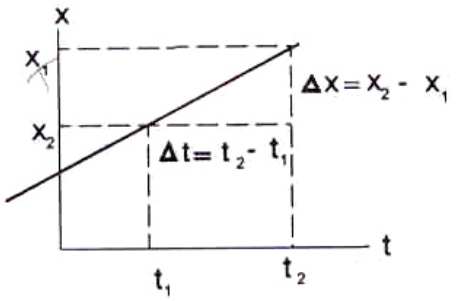


Figura IV.6: *El gráfico indica las distintas posiciones que toma una partícula a lo largo del tiempo, cuando viaja con velocidad constante. La pendiente (o inclinación) de la recta permite conocer su velocidad. La Figura ilustra el significado de la Δ introducida en el texto.*

La tangente de una recta es independiente del punto donde la midamos: es constante.

$$\tan\,\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{IV.4}$$

Como es un movimiento unidimensional la velocidad puede ser positiva o negativa dependiendo si $x_2 > x_1$ o viceversa.

Notación

La *diferencia* entre dos cantidades de la misma naturaleza y consecutivas, como por ejemplo: dos posiciones, dos instantes de tiempo, dos velocidades...etc., se indica mediante una Δ. Por ejemplo, Δx es la diferencia entre la posición x_2 y la posición x_1. $\Delta t \equiv [t_2 - t_1]$, es la diferencia entre el tiempo correspondiente a la posición x_2 y x_1, respectivamente. □

La diferencia entre la coordenada de una partícula en el tiempo t_2 y la coordenada en el tiempo t_1, (con $t_2 > t_1$), se denomina *desplazamiento*:

$$\text{Desplazamiento} \equiv [x_2 - x_1] \equiv \Delta x.$$

El desplazamiento es una cantidad que tiene signo. Si la coordenada x de la partícula se incrementa en el tiempo, el desplazamiento es un número positivo; si al contrario, decrece en el transcurso del tiempo, el desplazamiento es negativo.

Definición:

Velocidad de una partícula es el cuociente entre el desplazamiento y el tiempo que transcurrió durante dicho desplazamiento.

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{IV.5}$$

En un gráfico $x(t)$ versus t, esta definición corresponde a la tangente del ángulo que forma la recta que une (x_1, t_1) y (x_2, t_2) con el eje horizontal.

A partir de esta expresión podemos determinar la ecuación que relaciona x con t en cualquier instante:

$$v \equiv \text{velocidad constante} = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \tag{IV.6}$$

x es la posición correspondiente al tiempo t y x_0 es la posición ocupada por el móvil en t_0. Despejando:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v\,(t - t_0), \\ x &= x_0 + v\,t - v\,t_0. \end{aligned}$$

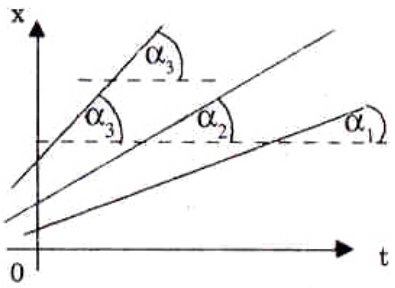
Supongamos que $t_0 = 0$, es decir, el reloj comienza a funcionar cuando la partícula se encuentra en x_0. (Es lo que sucede, por ejemplo, en una carrera de atletismo). Entonces:

En un movimiento con *velocidad constante*, la posición en un instante cualquiera, viene dada por:

$$x = x_0 + v \cdot t. \tag{IV.7}$$

En un gráfico x versus t, esta ecuación representa una línea recta.

La inclinación de la recta con respecto al eje del tiempo es una medida de la velocidad de la partícula. $\tan\alpha_1 \equiv v_1$, $\tan\alpha_2 \equiv v_2$, $\tan\alpha_3 \equiv v_3$, con $v_3 > v_2 > v_1$. Una recta horizontal corresponde a una partícula en reposo y una recta vertical (perpendicular al eje del tiempo) representa un objeto que tiene velocidad infinita.



IV.3.2. Velocidad media

Es muy difícil encontrar un movimiento con velocidad constante. Lo natural es que la velocidad cambie a lo largo de la trayectoria. En el caso de un vehículo, los semáforos, los baches en el camino, el tránsito... etc. impiden mantener una rapidez uniforme. En estas condiciones un gráfico posición versus tiempo, adopta una forma complicada: el cambio de velocidad produce, de acuerdo al razonamiento anterior, un cambio en la pendiente de la curva y el gráfico deja de ser una línea recta y se transforma en una curva. En este caso, sólo tiene sentido definir una velocidad instantánea –asociada a cada instante de la trayectoria–, pero aquí postergamos esta definición e introducimos en su lugar el concepto de *velocidad media*.

La idea detrás de la *velocidad media* es intuitiva: por ejemplo, cuando se prepara un viaje, se desea saber cuánto se tardará en llegar allí. Si tenemos experiencia en este tipo de viajes, sabemos que si acostumbramos a viajar a una velocidad de 90 km/h, entonces, para estimar el tiempo de viaje, debemos considerar una velocidad de sólo 70 km/h, con ello tenemos presente las posibles detenciones, la demora en adelantar a los vehículos más pesados en las subidas... etc. Esta velocidad de 70 km/h, es precisamente lo que se denomina *velocidad media*. Indica que si enviamos un automóvil con una velocidad constante e igual a 70 km/h llegará simultáneamente con nosotros. Con esta *velocidad media* se compensan exactamente las detenciones y los tramos de la carretera en la cual viajamos más rápido.

Esta es la explicación intuitiva de la velocidad media.

Definición:

La *velocidad media* entre O y el punto P de la trayectoria, se define como el cuociente entre el camino recorrido, $x_P - x_O$, y el tiempo total empleado en recorrerla Δt. En geometría, esto corresponde a la tangente del ángulo α que se indica en la Figura. IV.7.

A continuación generamos una definición cuantitativa (matemática). Notemos que en ambos casos –el modelo con velocidad constante, y el real, con velocidad variable–, la distancia recorrida

es la misma. De este modo, usando la relación entre la distancia y el tiempo empleado en recorrerla, IV.7, de la fórmula anterior, tenemos:

$$\text{Distancia Recorrida } = \text{ Velocidad Media} \times \text{Tiempo Total del Viaje.}$$

Para un caso real, debemos dividirlo en etapas y suponer nuevamente que viaja con velocidad constante en cada una de dichas etapas. (Sólo cuando definamos la velocidad instantánea nos podremos deshacer de esta suposición). Enseguida procedemos a sumar las respectivas distancias recorridas en cada etapa, de acuerdo a la fórmula [IV.7]:

$$\begin{aligned}
\text{Distancia Total Recorrida} &= \\
\text{Velocidad Media Etapa 1} &\times \text{Intervalo de Tiempo en Etapa 1} + \\
\text{Velocidad Media Etapa 2} &\times \text{Intervalo de Tiempo en Etapa 2} + \\
&\vdots \\
\text{Velocidad Media Etapa N} &\times \text{Intervalo de Tiempo en Etapa N.} \\
\hline
\text{Distancia Total Recorrida} &= \bar{V}_1 \times \Delta t_1 + \bar{V}_2 \times \Delta t_2 + \bar{V}_3 \times \Delta t_3 + ...
\end{aligned}$$

donde hemos definido Δt_k como el intervalo de tiempo en el cual el móvil viaja con velocidad $\bar{V}_k$.

Reemplazando la distancia total recorrida por la fórmula correspondiente a un observador que se mueve con velocidad constante, tenemos:

$$\text{Velocidad Media} \times \text{Tiempo Total del Viaje} \equiv \sum_{k=1}^{N} \bar{V}_k \times \Delta t_k$$

$$\text{Velocidad Media } \equiv \bar{V} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \bar{V}_k \times \Delta t_k}{\sum_{k=1}^{N} \Delta t_k} \qquad \text{(IV.8)}$$

La velocidad media en el punto P, de la Figura es:

$$\bar{V}(P) = \frac{[x_P - 0]}{[t_P - 0]} = \frac{x_P}{t_P}. \qquad \text{(IV.9)}$$

Note que esta definición es igual a la dada anteriormente [IV.8], el numerador en esta ecuación es precisamente la distancia recorrida x_P y el denominador es también el tiempo total t_P.

En la definición de la velocidad media sólo importa la posición final, la inicial y el tiempo empleado en el trayecto. Se pierde información acerca de las variaciones de la velocidad que

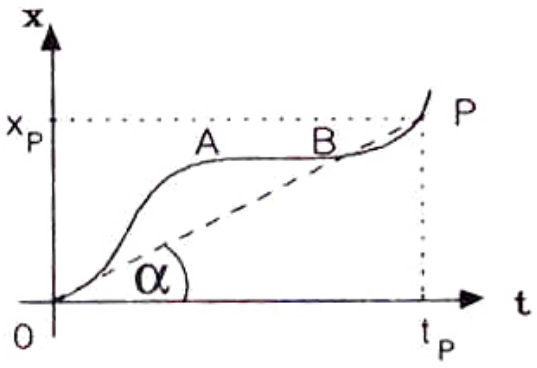


Figura IV.7: *La curva corresponde a un movimiento con velocidad variable. La velocidad media entre O y P se calcula dividiendo la distancia recorrida por el tiempo empleado en llegar a P. Con esto se pierde información acerca de los detalles de la trayectoria en los puntos intermedios.*

pudieron ocurrir durante la trayectoria. Por ejemplo, el valor calculado para la velocidad media en el ejemplo de la Figura, ignora que el móvil estuvo detenido entre t_A y t_B.

Ejemplo

Un objeto se mueve con una velocidad constante $v_1 = 20$ m/s durante 20 s partiendo desde A, permanece en reposo por 20 s y continúa viaje en la misma dirección con una velocidad de 40 m/s durante otros 20 s, deteniéndose finalmente en un punto que denominamos B.

a) Graficar la velocidad media de cada uno de los intervalos versus tiempo.

b) Indique la forma del Gráfico desplazamiento versus tiempo, para este ejemplo.

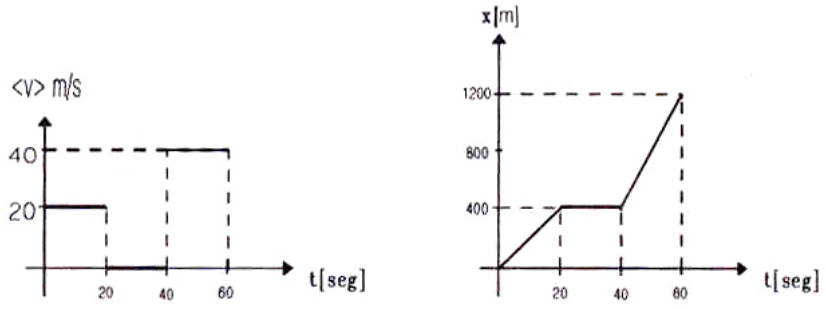


Figura IV.8: *Gráfico desplazamiento versus tiempo y velocidad media versus tiempo, obtenidos a partir de los datos de este ejemplo.*

c) Calcule el valor de la velocidad media entre los puntos A y B de este problema.

Los valores de la velocidad en las distintas etapas son:

$$\bar{v}_1 = 20 \text{ m/s} \qquad \bar{v}_2 = 0 \qquad \bar{v}_3 = 40 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_1 = 20 \text{ s} \qquad \Delta t_2 = 20\, s \quad \Delta t_3 = 20\, s$$

$\Delta t_1 \equiv$ intervalo de tiempo en que la partícula viajó con velocidad v_1... etc.

La velocidad media se calcula sumando las distancias recorridas en cada una de las etapas y dividiendo esta cantidad por el tiempo total empleado en hacerlo.

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \ [\bar{v}_1 \cdot \Delta t_1 + 0 \cdot \Delta t_2 + \bar{v}_3 \cdot \Delta t_3]/(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) \\ = & \ [20 \cdot 20 + 0 \cdot 20 + 40 \cdot 20]/[60s] \\ \bar{v} = & \ [400 + 800]/[60] = [1200]/[60] = 20 \text{ m/s } \square \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Ejemplo

En el equipo de la carrera de postas de un colegio, siempre ubican al más rápido en el último relevo. Si se conoce la velocidad media de cada uno de los atletas, demuestre que su distribución en la pista no mejora el tiempo del equipo.

Para simplificar el álgebra suponga que sólo participan dos atletas. No considere el posible cambio de rendimiento de un atleta debido a la presión sicológica de los últimos metros de la carrera.

Supongamos que los atletas alcanzan una velocidad media de $\bar{v_1}$ y $\bar{v_2}$ respectivamente.

Lo que debemos calcular es la velocidad media del equipo, es decir el tiempo que les toma recorrer el total del trayecto: AB.

$$\bar{v}_{AB} = \frac{\text{trayectoria total}}{\text{tiempo empleado}} = [x_1 + x_2]/[t_1 + t_2]$$

$$x \equiv \qquad x_1 = x_2 \quad \text{ambos recorren la misma distancia.}$$

$2\,x$ representa la distancia total recorrida, pero veremos que este dato no aparece en el resultado final. La explicación de este hecho es que la velocidad media del equipo debe depender de las velocidades de cada uno de los atletas y no de lo extenso de la trayectoria. Recuerde que la velocidad media de los atletas es constante, no depende de la distancia recorrida. Este es otro de los supuestos de este ejercicio: los atletas no se agotan.

Lo que puede influir, por cierto, es la fracción del trayecto que recorre cada uno de los atletas. Por ejemplo, si uno de los atletas realiza casi todo el trayecto, entonces la velocidad media del equipo será muy parecida a la velocidad media de este atleta.

Despejamos primero t_1. Usando la fórmula de la velocidad $v_1 = x_1/t_1 = x/t_1$ tenemos $t_1 = x/\bar{v}_1$.

Análogamente $t_2 = x/\bar{v}_2$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB} &= 2x/\left\{[x/\bar{v}_1] + [x/\bar{v}_2]\right\}, \\ &= 2x/\{x(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)/(\bar{v}_1\bar{v}_2)\} \\ \bar{v}_{AB} &= \frac{2\,\bar{v}_1\,\bar{v}_2}{(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)} \end{aligned}$$

$$\text{o, de otra forma:} \qquad \frac{2}{\bar{v}_{AB}} = \frac{1}{\bar{v}_1} + \frac{1}{\bar{v}_2}.$$

Como esta expresión no se altera si cambiamos $\bar{v}_1$ por $\bar{v}_2$, concluimos que la velocidad media del equipo es independiente del orden en que participen los atletas.

Supongamos que $\bar{v}_2$ *permanece fijo y distinto de cero*. Averiguemos cómo depende $\bar{v}_{AB}$ de $\bar{v}_1$. Esto corresponde al caso en que uno de los atletas recién se incorpora al grupo y el entrenador desea cuantificar el progreso que experimenta su equipo con este nuevo elemento.

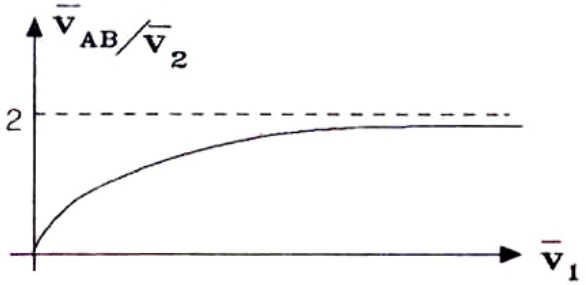


Figura IV.9: *Valor de la velocidad media cuando una de las velocidades del tramo permanece constante. La velocidad media depende en forma no–lineal con respecto a* v_1. *Si fuera lineal, al aumentar* v_1 *al doble, la velocidad media* v_{AB} *se incrementaría de igual forma.*

Del gráfico correspondiente a esta situación se desprende que por muy rápido que sea el nuevo atleta la velocidad del equipo no puede sobrepasar el valor límite de $v_{AB} = 2v_2$.

Las aproximaciones hechas aquí parecen razonables; no hemos incluido la demora en el paso del bastón ni tampoco el aspecto sicológico: lo que un atleta puede dar si es exigido al máximo. Este último factor puede ser sin duda importante, pero hay que darse cuenta que no está relacionado con la máxima velocidad que puede alcanzar el atleta. En otras palabras, si el atleta más lento mejora notablemente su tiempo cuando es exigido –y aún sigue siendo el más lento–, conviene ubicarlo en el último tramo.□

Ejercicio

Verifique si esta última afirmación corresponde a la verdad. Suponga, por ejemplo, que $v_1 > v_2$ pero que el atleta cuya rapidez es v_1 mejora su tiempo en un 10 % en las finales, en cambio el otro lo hace en un 30 %. □

Ejercicio

a) Encuentre la velocidad media cuando participan 4 atletas.

b) ¿Cuál es la expresión para la velocidad media, en el caso de dos atletas, suponiendo que no corren distancias iguales sino que uno de ellos cubre un porcentaje $0 < \alpha < 1$ de la distancia total? □

A continuación estudiamos un movimiento en el que ocurre un cambio de signo en la velocidad. En este caso debemos asignar un sentido positivo al eje coordenado.

Ejemplo

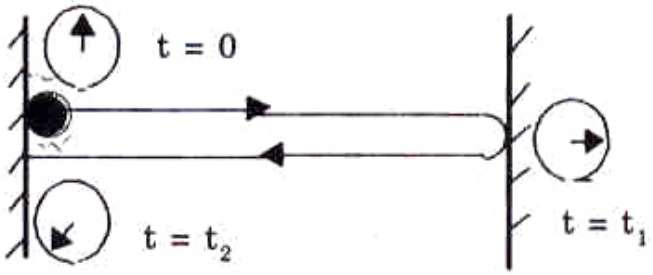
Una pelota se lanza sobre una pared con una velocidad constante v_1. Al chocar con la muralla se devuelve con una velocidad v_2 cuyo módulo *(rapidez)* es, $\alpha\, v_1$, donde $0 < \alpha < 1$.

Si la distancia desde el punto de lanzamiento hasta la muralla es d, se pide:

a) Calcular el tiempo que demora la pelota en ir y volver al punto de partida, como una función de α.

Ida:
De la Figura tenemos,

$$t_1 = d/v_1.$$



Retorno:

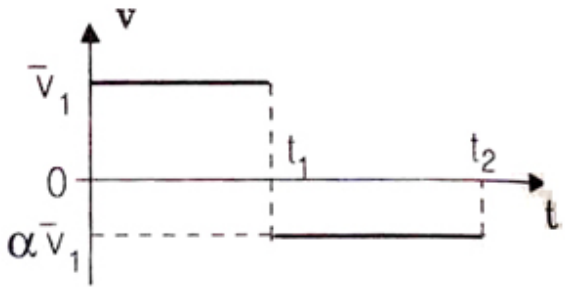
$$v_2 < 0.$$

$$v_2 = [0 - d]/[t_2 - t_1].$$

Si ahora ponemos $v_2 = -\alpha\, v_1$
entonces, $t_2 - t_1 = d/[\alpha\, v_1]$.
De aquí,

$$t_2 = d[1/v_1 + 1/(\alpha\, v_1)],$$

$$t_2 = t_1[1 + 1/\alpha]$$



b) Se pide graficar velocidad y rapidez versus t (Ver Figura).

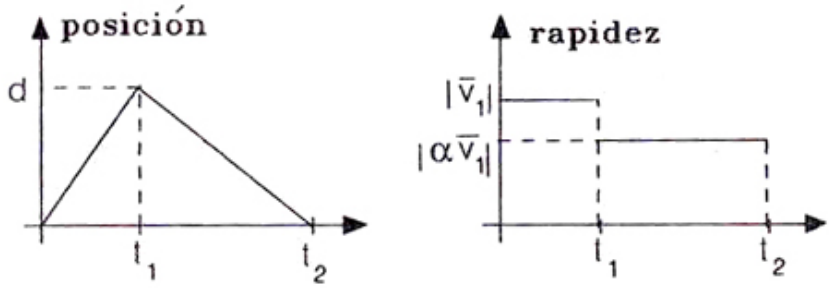


Figura IV.10: Gráfico *posición* versus *tiempo* y *rapidez* versus *tiempo*. Recuerde que la rapidez sólo considera el módulo de la velocidad. Note que a pesar que la distancia recorrida es 2 d, la posición final coincide con el punto de partida.

c) Haga un gráfico de la distancia recorrida versus el tiempo empleado, tomando como origen el punto de lanzamiento.□

En el siguiente párrafo haremos una afirmación cuya validez se extiende desde aquellos ejemplos cuyo movimiento se realiza con velocidad constante hasta los casos en que la velocidad varía arbitrariamente. Su demostración la postergamos hasta más adelante.

> En el gráfico *velocidad* versus *tiempo*, el área encerrada bajo la curva equivale al camino recorrido durante dicho intervalo. Este es un resultado general, válido para una velocidad constante o variable.

Verifiquemos esta afirmación en el ejemplo anterior; estudiemos la trayectoria de t_1 a t_2. Por definición, el móvil parte del origen como se muestra en la Figura. Como en cada uno de los trayectos recorre la distancia d, tenemos:

$$d = v_1 \times t_1 = |v_2| \times (t_2 - t_1),$$

pero ambos productos son iguales al área encerrada en el gráfico velocidad versus tiempo, de cada uno de estos casos. De hecho en el rebote de la pelota, d es negativo, debido a que el *desplazamiento* es negativo, por esta razón consideramos el valor absoluto de v_2.

En el caso general, aquél con velocidad variable, tomaremos pequeños intervalos y aproximaremos, en cada uno de ellos, la velocidad correspondiente con una velocidad constante característica de cada intervalo. De esta forma la distancia total recorrida sigue siendo el área bajo la curva, y estará compuesta por la sumatoria de los rectángulos asociados a cada intervalo de tiempo en los que se dividió el tramo total.

El análisis de esta aproximación es el contenido de la siguiente sección.

IV.4. VELOCIDAD INSTANTANEA

Una partícula que se traslada con velocidad constante corresponde al caso más simple que podemos imaginar. Sólo en casos muy particulares ocurre este fenómeno en la naturaleza. Sin embargo, como es difícil registrar la velocidad en cada punto de la trayectoria, se considera, como alternativa, la velocidad media.

Para analizar el movimiento de una partícula con más detalle se requiere conocer el valor de la velocidad en tramos intermedios de la trayectoria.

Recordemos que el valor de la velocidad media *no depende* de la subdivisión del tramo. Por ejemplo si subdividimos OP en cuatro intervalos arbitrarios y calculamos en cada uno de ellos la velocidad media y a partir de estos valores calculamos la velocidad media entre O y P de acuerdo a la fórmula IV.8, esta operación, *no altera* el valor de la velocidad media calculada, por ejemplo, dividiendo el trayecto OP en sólo dos tramos.

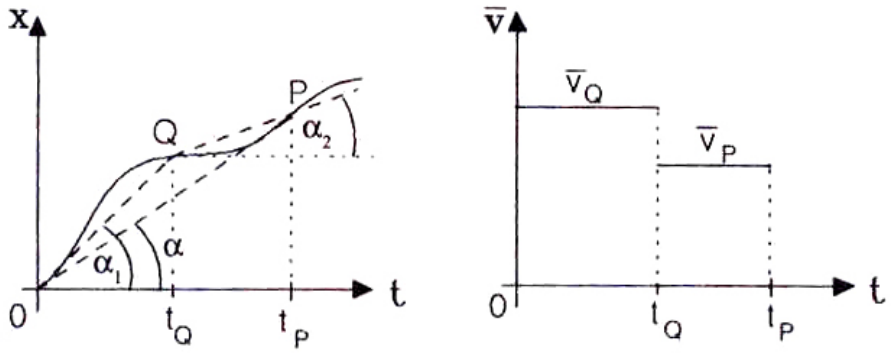


Figura IV.11: *El objeto se desplaza con una velocidad variable. A cada intervalo se asocia un valor para su velocidad (velocidad media), que depende del intervalo mismo. En la Figura se toma un punto intermedio Q para comparar con el caso original en el cual sólo se contabiliza el punto inicial O y el final P.*

Hasta ahora sólo podemos estudiar problemas de los cuales conocemos la velocidad media en un cierto número de intervalos. Al ir de un tramo al siguiente, la velocidad media experimenta un salto para alcanzar el nuevo valor. Obviamente esto es artificial. La velocidad varía en forma continua, no a saltos.

Para disminuir la magnitud de los saltos es necesario subdividir el tramo en intervalos más pequeños. Si pretendemos hacerlos imperceptibles, debemos aumentar el número de intervalos, haciéndolos más y más diminutos. En el límite –cuando el tramo es más pequeño de lo que podemos imaginar pero distinto de cero–, necesitamos conocer la velocidad asociada a cada uno de los puntos de la trayectoria. Esto es lo que se denomina la *velocidad instantánea.*

Para realizar este proceso debemos calcular la velocidad media entre dos puntos que estén lo más cercano posible. En el proceso de acercar un punto al otro, el valor de la velocidad (la pendiente

de la cuerda en la Figura IV.12) va cambiando, pero se aproxima a un límite que se denomina la *velocidad instantánea* y que corresponde a la inclinación de la tangente a la curva en dicho punto.

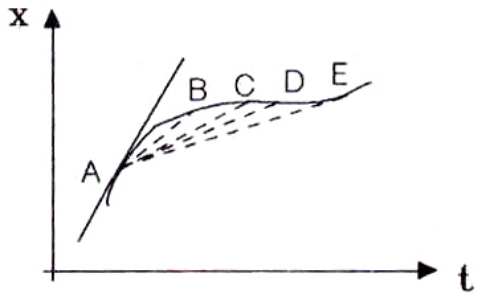


Figura IV.12: *En esta Figura se aprecia que al ir acercando el punto E hacia A, la cuerda se aproxima más y más a la tangente trazada por el punto A. El valor de la tangente en A, corresponde al valor de la velocidad instantánea en A.*

La descripción anterior corresponde a una operación matemática bien definida, que se denomina tomar el *límite* de una función. La velocidad instantánea se define como:

$$\text{velocidad instantánea en } \; t_0 \equiv v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left[\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right] \quad \text{(IV.11)}$$

La operación $\lim_{t \to t_0}$, en la forma señalada corresponde a tomar la *derivada* de la función $x(t)$. En términos geométricos, la derivada es la inclinación de la tangente a la curva en el punto t_0. Esto es lo que se observa en la Figura IV.12, al acercarse al punto A tanto como sea posible: $(D \to C \to B \to ...)$ la cuerda tiende a coincidir con la tangente en el punto A.

En un gráfico *desplazamiento* versus *tiempo*, la velocidad instantánea en un punto P, es la inclinación de la tangente a la curva en dicho punto.

Nota acerca del límite.

El hecho de tomar puntos tan cercanos $t \to t_0$, revela que al dividir por $[t - t_0]$ en la ecuación IV.11, corremos el riesgo de estar dividiendo por cero. La respuesta a este temor es la siguiente: primero, no se está dividiendo por cero puesto que la operación $\lim$ señala que $[t - t_0]$ tiende a un

valor tan pequeño como se quiera, pero *distinto de cero*. En segundo lugar, si la función $x(t)$, es continua –y este es el tipo de funciones que nos interesan–, al acercar $t \to t_0$, la diferencia entre $x(t)$ y $x(t_0)$ es también muy pequeña e igual a una suma de términos que contienen potencias de $[t - t_0]$.

$$x(t) - x(t_0) = b \cdot [t - t_0] + c \cdot [t - t_0]^2 + ...$$

donde $b,\ c, ...$ son constantes que dependen del valor de $x(t_0)$. Solo diremos que este es un resultado general y que se denomina desarrollo de Taylor.

Volviendo al argumento previo, al tomar el límite, cuando $t \to t_0$, las potencias de $[t - t_0]$ que aparecen en $x(t) - x(t_0)$, se hacen arbitrariamente pequeñas y no necesitamos considerarlas salvo la primera, $[t - t_o]$ que se simplifica con el denominador y da el valor de la derivada.□

IV.5. ACELERACION

IV.5.1. Definición

En la sección anterior definimos la velocidad como la inclinación de la tangente a la curva $x(t)$ versus t. Analogamente, en un gráfico *velocidad* versus *tiempo*, definimos la aceleración como la inclinación de la tangente a la curva que determina la velocidad en cada instante.

La aceleración se define como la razón entre el cambio de velocidad y el intervalo en el cual ésta ocurre.

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{IV.12}$$

Para estudiar las propiedades de la aceleración, definida de este modo, comenzamos, como es usual, por el caso más sencillo.

De acuerdo a esta estrategia, inicialmente *no* consideramos cambios arbitrarios de velocidad como el que muestra la Figura a continuación, por las dificultades matemáticas que involucra.

A continuación nos referimos a las dimensiones de la aceleración y enseguida comenzamos con el caso de *aceleración constante*.

IV.5.2. Dimensiones y unidades. (SI)

$$[a] \equiv \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \left[\frac{L}{T^2}\right] = \frac{(m/s)}{s} = m/s^2.$$

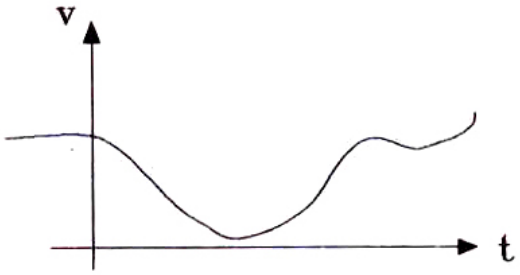


Figura IV.13: *Gráfico de velocidad versus tiempo para una aceleración que varía en el tiempo. Las trayectorias con aceleración constante corresponden a una recta en este gráfico. La inclinación de la recta nos da el valor de la aceleración.*

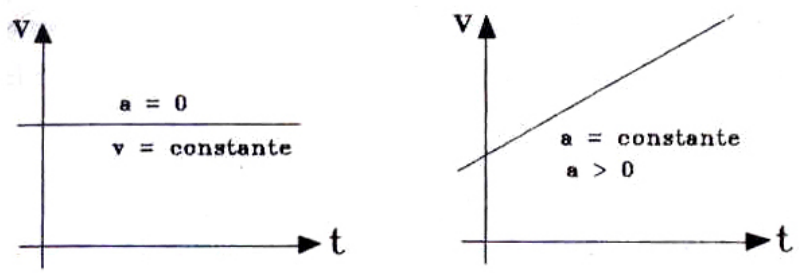


Figura IV.14: *Gráfico de velocidad constante versus tiempo y velocidad versus tiempo con aceleración constante.*

La dimensión de longitud se escribe como $[L]$ y la dimensión correspondiente al tiempo, como [T].

IV.5.3. Aceleración constante

Como la aceleración es, por definición, la inclinación de la tangente a la curva *velocidad* versus *tiempo*, el caso particular de una aceleración constante queda representado, en este tipo de gráfico, por una línea recta.

A partir de la definición de aceleración:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

obtenemos la expresión para la velocidad. Para acortar los cálculos suponemos el origen del tiempo en $t_0 = 0$. Despejando la velocidad de la fórmula anterior, llegamos a:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow a \cdot t = v - v_0,$$

donde reemplazamos t_1 por t, un tiempo arbitrario, puesto que la pendiente de la curva es una sola y no depende del valor que tome t. De aquí tenemos:

$$v = v_0 + a \cdot t. \tag{IV.13}$$

Esta expresión nos da la velocidad en el instante t, bajo el supuesto que $a =$ constante y $t_0 = 0$.

IV.5.4. La posición en función del tiempo si la aceleración es constante

Antes de calcular la distancia recorrida hasta el instante t, necesitamos calcular la velocidad media $\bar{v}$, para un movimiento con una aceleración constante.

Recordemos que, por definición, la velocidad media es la velocidad constante con la cual un móvil debe viajar para recorrer *la misma distancia* que en el caso dado, empleando el mismo tiempo. Cuantitativamente la velocidad media es $\bar{v} = x/t$, con
(x $\equiv$ distancia recorrida en el intervalo de tiempo t). De aquí obtenemos:

$$x = \bar{v}\, t. \tag{IV.14}$$

La expresión $\bar{v} \cdot t$ tiene *dimensiones de distancia*.

$$\bar{v} \cdot t \equiv \frac{[L]}{[T]} \cdot [T] = [L].$$

Por otra parte, sabemos que el área bajo la curva en un gráfico *velocidad* versus *tiempo* representa la distancia recorrida. En el caso de aceleración constante, entonces la distancia recorrida es el área bajo el trapecio de la Figura IV.15, y su valor es, de acuerdo al resultado que obtuvimos en el capítulo anterior:

$$\frac{1}{2}(v + v_o) \cdot t = \text{distancia recorrida en el tiempo t} \equiv\ x.$$

Esta distancia debe ser –por definición de velocidad media–, la misma que recorrió el móvil con velocidad constante $\bar{v}$,

$$\frac{1}{2}(v + v_0) \cdot t = \bar{v}\, t = x, \tag{IV.15}$$

de la primera igualdad se obtiene la expresión para la velocidad media.

La velocidad media de una partícula moviéndose con aceleración constante es:

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_i}{2}. \tag{IV.16}$$

Los gráficos *velocidad* versus *tiempo*, para los casos de aceleración constante, son líneas rectas cuya pendiente indica la magnitud de la aceleración: si la aceleración es nula, el gráfico es una línea horizontal. Este es un resultado similar al obtenido en un gráfico *desplazamiento* versus *tiempo* para un móvil con velocidad constante.

Si la aceleración cambia en el tiempo, la pendiente en el gráfico *velocidad* versus *tiempo* cambia y la recta se transforma en una curva. El método para encontrar la distancia recorrida –área bajo la curva–, es el mismo pero su expresión matemática no es simple.

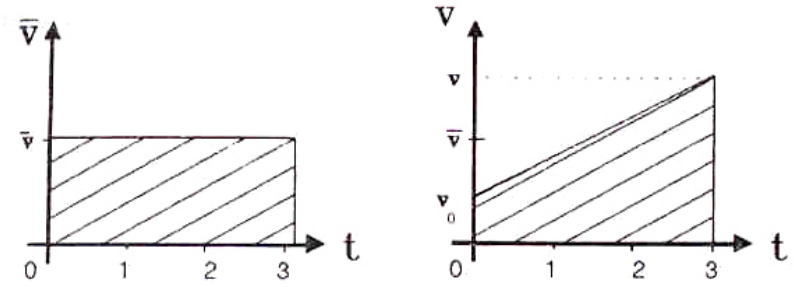


Figura IV.15: *En la Figura se indica el área bajo la curva para el caso aceleración nula y aceleración constante. En este último caso el área achurada corresponde a un trapecio cuyas bases son v y v_0, y su altura t.*

Retornando a la expresión encontrada para la distancia recorrida: $x = \bar{v} \cdot t$, y reemplazando aquí el resultado obtenido para la velocidad media, tenemos:

$$x = \frac{1}{2}(v + v_o)t$$

pero la velocidad, en cualquier instante, está dada por $v = v_o + at$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(v + v_o)t \\ x &= \frac{1}{2}(v_o + a \cdot t + v_o) \cdot t \\ x &= v_o t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned} \tag{IV.17}$$

Revisamos las dimensiones en cada uno de los términos de esta última ecuación:

$$\begin{aligned} [x] &= L, \\ [v_o \cdot t] &= [\tfrac{L}{T} \cdot T] = L, \\ [\tfrac{1}{2}\tfrac{L}{T^2}] \cdot [T^2] &= L. \end{aligned}$$

$1/2$ es un número y *no* tiene dimensiones.

Los números que aparecen como factores frente a una cantidad física no tienen dimensiones.

IV.5.5. Fórmulas de cinemática en una dimensión y con aceleración constante.

$$a = \text{constante},\ t_o = 0$$

$$x = x_0 + \bar{v} \cdot t \tag{IV.18}$$

$$v = v_o + a \cdot t \tag{IV.19}$$

$$x = x_0 + v_o t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \tag{IV.20}$$

$$2\,a\,(x - x_0) = v^2 - v_o^2 \tag{IV.21}$$

En todas estas fórmulas, con excepción de IV.21, el tiempo aparece explícitamente. *Esta última ecuación IV.21, se obtiene a partir de las anteriores* y se caracteriza por no contener el tiempo t. Para llegar a dicha expresión debe operarse de la siguiente forma: de $v = v_o + a \cdot t$ podemos despejar el tiempo:

$$t = \frac{v - v_o}{a}.$$

Reemplazando t en la ecuación correspondiente a la distancia recorrida:

$$x = v_o \left(\frac{v - v_o}{a} \right) + \frac{1}{2}\, a \cdot \left(\frac{v - v_o}{a} \right)^2,$$

y desarrollando cada uno de los términos de esta última expresión:

$$\begin{aligned} x = & \frac{v \cdot v_o}{a} - \frac{1}{a}v_o^2 + \frac{1}{2\,a}v^2 - \frac{v_o \cdot v}{a} + \frac{1}{2\,a}v_o^2 \\ x = & \frac{1}{2\,a}(v^2 - v_o^2), \qquad \text{o mejor} \\ 2\,a \cdot x = & \; v^2 - v_o^2 \end{aligned}$$

Esta última fórmula es la ecuación IV.21. Como acabamos de mostrar, esta ecuación *es una combinación de las anteriores*.

IV.6. EJEMPLOS.

Ejemplo

Un auto de carrera acelera desde $v = 0$ hasta alcanzar una velocidad de 240 km/h en una distancia de sólo $1/4$ de kilómetro. ¿Cuál es el valor de su aceleración?

Datos:

t = 0, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $v_f = 240$ km/h, a = cte.

Si conocemos la distancia que recorre y la velocidad que alcanza en dicha distancia, debemos usar la ecuación IV.21 para despejar directamente la aceleración.

$$\begin{aligned} 2\,a \cdot x &= v^2 - v_0^2, \\ a = \frac{v^2}{2\,x} &= \frac{(240)^2}{2 \cdot (1/4)} \left[\frac{(\text{km/h})^2}{\text{km}}\right]. \end{aligned}$$

Las unidades empleadas oscurecen la magnitud de la aceleración encontrada. Expresémosla en m/s^2.

$$a = 2 \cdot (240)^2 \frac{\text{km/h}}{\text{h}} = 2 \cdot (240)^2 \frac{1000 \text{ m}}{3600\,\text{s} \cdot 3600 \text{ s}},$$

de aquí se obtiene el valor numérico de la aceleración,

$$a = 2 \cdot \left[\frac{240}{3600}\right]^2 \cdot 1000\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}] = 40/3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

pero la aceleración de gravedad, g, es aproximadamente $9,8$ m/s^2, por lo tanto, la aceleración del automóvil en la partida es de $a = 40/3$ m/s^2 $\approx$ $\frac{4}{3}$ g.

Una estimación para el valor de la máxima aceleración que se puede comunicar a un automóvil sin que *resbale* es de ~ 1.5 **g**. En realidad este valor es, tal como se menciona, sólo una estimación;

depende de otros parámetros, como el tamaño y naturaleza de la superficies que están en contacto, si existió resbalamiento previo...etc. □

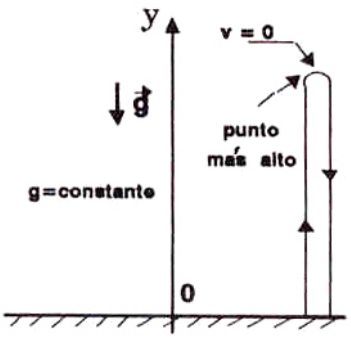
Una vez que asignamos –por conveniencia– un sentido positivo a nuestro eje de coordenadas, las aceleraciones pueden ser positivas (+) o negativas (desaceleraciones, (–)), dependiendo si coinciden con el sentido del eje coordenado o no.

Es necesario recordar que la física del problema, es decir lo que determina el comportamiento de una partícula en una cierta situación, no depende del sentido (+) o (–) asignado arbitrariamente al eje.

Un ejercicio típico es el de una pelota lanzada al aire. (No considere la viscosidad provocada por el aire.)

Una vez disparada, la experiencia nos indica que ésta disminuye constantemente su velocidad hasta que finalmente cambia de signo y la pelota retorna al piso nuevamente. El cambio de velocidad indica la presencia de una aceleración. En este caso *la aceleración mantiene constante su magnitud y sentido durante toda la trayectoria del objeto*.

Nuestra elección del sentido positivo implica que $a \equiv -g = -9{,}8$ m/s^2. La orientación escogida para los ejes de referencia es arbitraria y la trayectoria del punto no puede depender de ella. Las matemáticas son autoconsistentes, por lo tanto, si en el desarrollo del problema, respetamos la convención adoptada, la respuesta será consistente con lo que se observa en la realidad.



Ejemplo

Encontrar el tiempo que tarda, en volver a su punto de lanzamiento, una partícula disparada verticalmente al aire.

El ejercicio propuesto, con el sistema coordenado estipulado en la Figura, es el siguiente:

Datos:

$v_0 \equiv$ velocidad de lanzamiento de un objeto, $y_0 = 0, \quad g \equiv 9{,}8$ m/s^2. □

Supongamos que el cuerpo demora un tiempo T en volver a su punto de partida. En el instante que retorna al origen, se produce la siguiente igualdad en la ecuación IV.20:

$$y = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

$$y(T) = 0 = v_0\,T - \frac{1}{2}g\,T^2 \Rightarrow \;\; 2 \text{ soluciones: } T = 0, \;\; T = \frac{2v_0}{g}$$

Ambas soluciones tienen un significado físico: $T = 0$ indica el instante en que la partícula abandona el piso y $T = 2\,v_0/g$, el tiempo que tardó en retornar al piso, después de alcanzar su altura máxima.

Cabe señalar que, en algunos ejemplos, una de las soluciones debe ser desechada por carecer de interpretación física.

Revisemos las dimensiones de esta última solución:

$$T = [T] = \left[\frac{L}{T}\right]\left[\frac{1}{L/T^2}\right] = T.$$

Usando la información acumulada, podemos averiguar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Llamemos τ a este instante:

$$v(\tau) = v_0 - g \cdot \tau$$

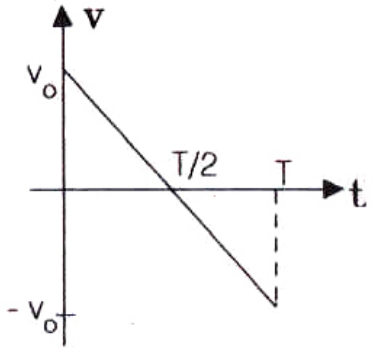
En ese instante, la velocidad debe ser nula puesto que si tuviera una pequeña componente positiva, podría aún elevarse un poco más y no estaríamos en el verdadero máximo de la altura. De aquí:

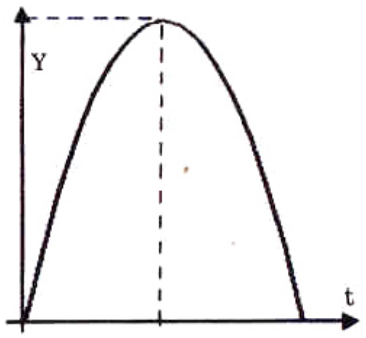
$$0 = v_0 - g \cdot \tau,$$
$$\tau = v_0/g \equiv \frac{T}{2}.$$

Ahora podemos calcular el valor de la altura máxima:

$$y_1 = v_0^2/g - \frac{1}{2}v_0^2/g = \frac{1}{2}v_0^2/g$$

Finalmente incluimos un gráfico de *velocidad* versus *tiempo* y *posición* versus *tiempo*. Notemos que la velocidad media es nula y que el área bajo la curva *velocidad* versus *tiempo*, también, si tenemos en cuenta los signos que aparecen. Del gráfico sabemos exactamente la posición en cada instante de la trayectoria. Casi siempre utilizaremos g, la aceleración de gravedad como una *constante*.





En realidad depende de la altura sobre la Tierra y también de la composición al interior del terreno donde se ubica el observador. Más adelante mostraremos que el error que se comete al hacer esta aproximación es despreciable, si la altura que alcanza el objeto es muy pequeña comparada con el radio de la Tierra.

Tampoco hemos considerado la fricción del aire. Este aspecto será propuesto como un ejercicio numérico para ser resuelto con el computador.

Ejemplo

Un tren puede acelerar a una razón de $a_1 = 20$ [cm/s] y desacelerar a 100 [cm/s]. Determine el tiempo mínimo que puede demorar este tren para ir de una estación a otra, situada a 2 km de distancia.

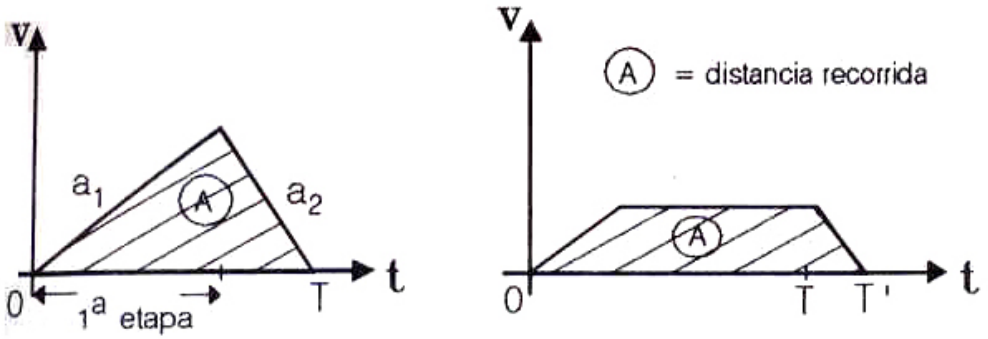


Figura IV.16: *Gráfico velocidad versus tiempo en dos situaciones posibles: el tren acelera por un cierto tiempo y después frena para alcanzar a detenerse frente a la estación y el caso en el cual mantiene una velocidad constante en un tramo intermedio.*

La intuición apunta a que la máxima distancia recorrida en el mínimo de tiempo, ocurre cuando el tren acelera al máximo hasta un cierto instante en el cual debe poner los frenos para -justo-, alcanzar a detenerse justo frente a la próxima estación.

Esta conjetura queda demostrada al interpretar el significado del área que encierra cada uno de los dos gráficos *velocidad* versus *tiempo* que se incluyen. Ambos involucran un mismo valor para el área –o sea, distancia recorrida–, pero el primero lo hace en un intervalo menor.

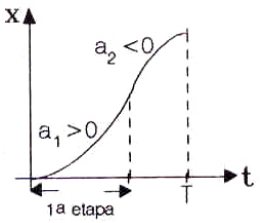
Resolveremos este problema en tres formas diferentes.

Método gráfico

Designamos la distancia a recorrer como $L = 2{,}000$ m. Otros datos son la aceleración a_1 = 0,2 m/s^2 y la desaceleración a_2 = – 1 m/s^2. Con ellos podemos dibujar el gráfico *velocidad* versus

tiempo. La base del triángulo es T, el tiempo buscado, que lo descomponemos en $T = t_1 + t_2$, donde t_1 es el tiempo durante el cual el maquinista acelera y t_2 el intervalo en el cual desacelera.

La altura h del triángulo se determina de la siguiente forma: $h = t_1 \tan\alpha = t_2 \tan\beta$. Ahora, usando trigonometría y la definición de aceleración como la pendiente en el gráfico $v(t)$ versus t, tenemos:



$a_1 \equiv \tan\alpha,\ -a_2 \equiv \tan(\pi-\beta) = -\tan\beta.$

Por lo tanto: $T = t_1+t_2 = h\left[\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{|a_2|}\right]$.

El área del triángulo es $L = \frac{1}{2}\,h\,T$, y reemplazando h por el valor obtenido en función de las aceleraciones tenemos:

$$T^2 = 2\,L\,\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|}\right].\Box$$

Método analítico

A continuación resolvemos el problema en forma analítica, recordando que *ocurren dos aceleraciones distintas* y, como las ecuaciones que describen el movimiento:

$$\begin{aligned} i)\quad x - x_0 &= v_0(t-t_0) + \tfrac{1}{2}a\cdot(t-t_0)^2 \\ ii)\qquad v_f &= v_0 + a(t-t_0) \end{aligned}$$

son válidas solamente para el caso de aceleración constante, debemos usarlas dos veces consecutivas, cambiando el valor de la aceleración.

• Primera etapa

Condiciones iniciales:

$v_0 = 0$ Dato. El tren parte del reposo.

$x_0 = 0$ Nuestra elección para el origen de coordenadas.

$t_0 = 0$ Definición del instante inicial.

Las dos ecuaciones de movimiento, incluyendo estas condiciones iniciales, se transforman en:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \quad (a_1 > 0). \tag{IV.22}$$

Hemos designado t_1 al instante cuando el maquinista comienza a desacelerar.

$$v_{f_1} = a_1\, t_1 \tag{IV.23}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres *incógnitas*: $v_{f_1},\, t_1,\, x_1$. Como existen más incógnitas que ecuaciones, no podemos resolverlas. Necesitamos más ecuaciones.

• Segunda etapa.

Debemos escribir nuevamente las ecuaciones de movimiento, recordando que las condiciones iniciales en esta etapa (indicadas en la columna de la izquierda) son los valores que alcanzan las variables al final de la primera etapa.

$$\begin{aligned} x_{\text{inicial}} &= x_1, \quad \text{además} \quad x_{\text{final}} \equiv x_2 = L, \\ t_{\text{inicial}} &= t_1, \quad v_{\text{final}} = v_{f_2} = 0, \\ v_{\text{inicial}} &= v_{f_1} \end{aligned}$$

Con estas condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento dan el siguiente resultado para el instante $t = T$, cuando el tren se detiene:

$$L - x_1 \;=\; v_{f_1}(T - t_1) - \frac{1}{2} a_2 (T - t_1)^2. \tag{IV.24}$$

Una segunda ecuación se obtiene al imponer que la velocidad final en esta etapa sea nula: el tren se detiene en B, $v_{f_2} = 0$.

$$\begin{aligned} v_{f_2} \equiv 0 &= v_{f_1} - a_2(T - t_1), \\ \text{como} \quad v_{f_1} &= a_1\, t_1, \\ 0 &= a_1 t_1 - a_2(T - t_1). \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Tenemos *cuatro ecuaciones*: las dos obtenidas en la primera etapa y las dos del segundo tramo. Las incógnitas son también cuatro: $(v_{f_1},\, t_1,\, x_1,\, T)$. Despejando $(T - t_1)$ de la última ecuación [IV.25], se tiene $(T - t_1) = [a_1/|a_2|]\, t_1$, y reemplazando en la ecuación anterior, [IV.24], obtenemos:

$$L - x_1 = \frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2 - \frac{1}{2}\, \frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2 = \frac{1}{2}\, \frac{a_1^2}{a_2}\, t_1^2. \tag{IV.26}$$

Substituyendo x_1 por su valor en función de t_1 de la ecuación IV.22, obtenemos el valor de L en función de t_1:

$$
\begin{aligned}
L - \frac{1}{2} a_1 \, t_1^2 &= \frac{1}{2} \, \frac{a_1^2}{a_2} \, t_1^2, \\
\text{ordenando,} \quad 2\,L &= a_1 (1 + \frac{a_1}{a_2}) \, t_1^2, \\
t_1 &= \left[\frac{2\,L\,a_2}{a_1\,(a_1 \, + \, a_2)} \right]^{1/2}. \qquad \text{(IV.27)}
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que la dimensión corresponde efectivamente a la de un tiempo:

$$
\left[\frac{2La_2}{a_1(a_1+a_2)} \right] = \frac{L \cdot \frac{L}{T^2}}{L/T^2 \, [L/T^2 + L/T^2]} = \frac{L}{L/T^2} = T^2.
$$

El resto de las incógnitas: t_1, T (que es el tiempo buscado), v_{f_1} y x_1, podemos despejarlas con las ecuaciones restantes.

Para comparar con nuestro resultado anterior, despejaremos T.

De la ecuación IV.25 obtenemos T en función de t_1:

$$
T = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \, t_1,
$$

reemplazando en esta ecuación la expresión para t_1, se comprueba que ambos resultados coinciden:

$$
T = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \, \left[\frac{2\,L}{(a_1 + a_2)} \, \frac{a_2}{a_1} \right]^{1/2} = \left\{ 2\,L \, \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|} \right] \right\}^{1/2} .\Box
$$

Es muy conveniente, en casos como éste en que se abusa del álgebra, comprobar el resultado en situaciones extremas, más simples, y que constituyan un caso particular del anterior donde el resultado aflore con menos esfuerzo. De esta forma, contamos con un medio independiente para verificar si hemos cometido algún error en nuestro desarrollo.

Veamos si este resultado funciona en algún caso extremo. Supongamos que el tren tiene unos frenos extraordinariamente potentes y que puede detenerse casi instantánea-mente, sin importar el valor de la velocidad que haya adquirido hasta ese momento. Sin mirar las ecuaciones, podemos deducir que, en este caso, el tren puede permanecer acelerando hasta el instante mismo en que haga su entrada en la estación de la ciudad próxima, justo entonces frenará y se detendrá inmediatamente.

Este caso corresponde, en las ecuaciones a poner $|a_2| = \infty$, o mejor, un valor muy grande comparado con a_1. Con esta aproximación obtenemos que $1/|a_2| << 1/a_1$ y por lo tanto $1/|a_2| + 1/a_1 \approx 1/a_1$. Reemplazando esta aproximación en la expresión para T, resulta:

$$
T = \left[2\,L/a_1 \right]^{1/2},
$$

que es lo esperado en este caso extremo, $T = t_1$.

Es imposible detener un tren de este modo, para que ello ocurra deberíamos ser capaces de disipar una cantidad inmensa de energía en muy corto tiempo. Pero este inconveniente no está incluido en las ecuaciones que hemos usado hasta ahora y por tanto no genera ninguna contradicción.

Ejemplo

Se incluye un desarrollo alternativo para resolver el ejemplo anterior.

Hacemos uso de las ecuación IV.21, donde el tiempo no aparece explícitamente:

$$1^{\text{era}}\,\text{Etapa} \qquad 2\,a_1 x_1 = v_{f_1}^2,$$

$$2^{\text{da}}\text{Etapa} \qquad -2\,a_2(L - x_1) = 0 - v_{f_1}^2.$$

Las constantes que aparecen aquí están definidas en el ejemplo anterior. Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas x_1, v_{f_1}. Sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$a_1 x_1 - a_2(L - x_1) = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a_2 L}{a_1 + a_2}.$$

A partir de este valor se encuentra t_1:

$$v_{f_1} = a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{f_1}}{a_1} = \frac{(2a_1 x_1)^{1/2}}{a_1} \quad \Rightarrow t_1 = \left[\frac{2a_2 L}{a_1(a_1 + a_2)}\right]^{1/2}.$$

En la 2^{da} **Etapa** tenemos:

$$v_{f_2} = 0 = v_{f_1} - a_2(T - t_1) \quad \Rightarrow T - t_1 = \frac{(2a_1 x_1)^{1/2}}{a_2} = \left[\frac{2a_1 L}{a_2(a_1 + a_2)}\right]^{1/2},$$

$$T = \left[\frac{2L}{a_1 + a_2}\right]^{1/2} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_2}\right]^{1/2} + \left[\frac{a_2}{a_1}\right]^{1/2} \right\}.$$

Compruebe que este resultado es el mismo obtenido anteriormente.

Compruebe que si $a_1 = 0$, o $a_2 = 0$, $\Longrightarrow\ T \longrightarrow \infty$, puesto que estos casos equivalen a que la locomotora no puede empezar a moverse ($a_1 = 0$) o que no tiene frenos ($a_2 = 0$). En ambos casos la solución matemática del problema es que el tren no se mueva.

Compruebe que si $a_2 \longrightarrow \infty$, entonces $T \longrightarrow [2\,L/a_1]$.

En resumen, podemos concluir que el método gráfico es el más sencillo y directo para resolver este problema.

IV.7. VISCOSIDAD

Es sabido que la velocidad adquirida durante la caída libre a través de la atmósfera, no aumenta linealmente con el tiempo que demora su caída, como era de esperar, si suponemos que la aceleración gravitacional g, permanece constante.

Existe otra fuerza, proveniente del choque que experimenta el cuerpo con las moléculas que componen la atmósfera. Estos choques lo frenan y, en el caso de la caída libre, imponen un valor límite para su velocidad.

De no existir este efecto, las gotas de lluvia alcanzarían la Tierra con mucho mayor velocidad y los granizos se convertirían en verdaderos proyectiles mortales cayendo sobre nuestras cabezas.

Se deja propuesto resolver *numéricamente* el problema del paracaidista que se lanza desde un avión. La ecuación *propuesta* para el cambio de velocidad que experimenta el paracaidista durante su caída, es la siguiente:

$$\frac{d}{dt}v = g - c \cdot v/m \tag{IV.28}$$

La constante *c* es un número que se obtiene empíricamente y representa el coeficiente de arrastre o viscosidad del aire y su origen es el choque con las moléculas de la atmósfera que le quitan velocidad al objeto que cae. Este coeficiente depende de muchos factores como la superficie del objeto que cae, la temperatura del medio, las moléculas que lo componen ...etc.

Las dimensiones del parámetro c son [masa/tiempo], y un valor típico para un paracaidista es: $c \approx 12,5 \longrightarrow 17,0$ [kg/m].

En forma numérica la derivada de la velocidad (o de cualquiera otra función) se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{d\,v}{dt} \simeq \frac{\Delta\,v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \tag{IV.29}$$

Para la velocidad que aparece a la derecha de la ecuación de movimiento en IV.28, podemos usar el valor medio de la velocidad en ese intervalo $[v(t_{i+1}) + v(t_i)]/2$.

Introduciendo estas expresiones en la ecuación IV.28, tenemos un algoritmo para encontrar la velocidad $v(t_{i+1})$ en función de $v(t_i)$.

IV.8. Definición y Aplicación de las Derivadas

Como es difícil retener y manejar tantas definicones, a continuación ilustraremos estas ideas con una serie de ejemplos resueltos.

Ejemplo

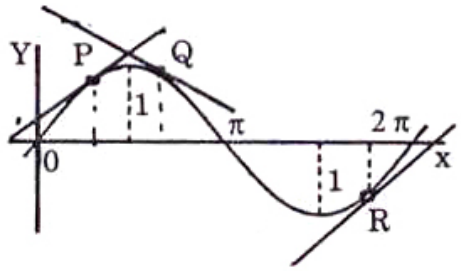


Figura IV.17: *El gráfico representa la función sen* α*. El valor de la pendiente de la tangente en cada uno de los puntos indicados tiene el mismo valor que* $\cos\,\alpha$*, donde* α *es el valor correspondiente de abcisa en P, Q y R.*

Demostrar que $\lim_{\delta\to 0}\left[\dfrac{\text{sen}(\alpha+\delta)-\text{sen}\,\alpha}{\delta}\right]=\cos\,\alpha.$

Este problema está resuelto en el Apéndice, aquí lo analizaremos usando geometría. Para ello nos referiremos a la Figura que se incluye a continuación.

$$OD=1,\quad \text{sen}\,\alpha=DC,\quad \text{sen}(\alpha+\delta)=AB,$$

$$\text{sen}(\alpha+\delta)-\text{sen}\,\alpha=AB-DC=EB,$$

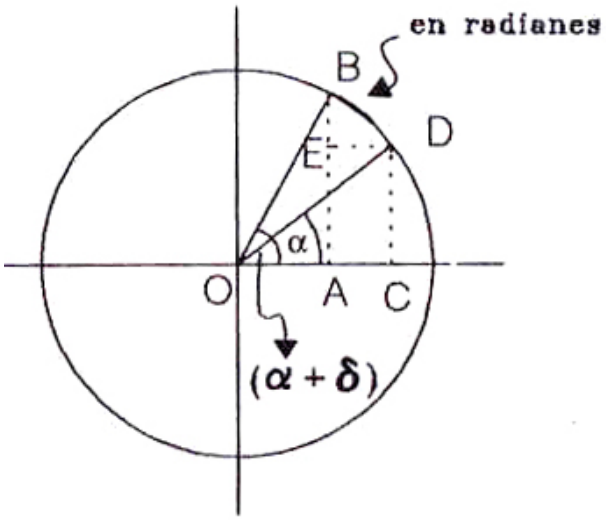
pero, $\cos(\alpha+\delta)=\dfrac{EB}{BD}=\dfrac{EB}{\delta}$.
Aquí hemos aproximado el arco BD con la cuerda BD $\simeq\ \delta$ (medida en *radianes*). Entonces:

$$\text{sen}(\alpha+\delta)-\text{sen}\,\alpha\simeq\delta\cdot\cos(\alpha+\delta),$$

despejando $\cos(\alpha+\delta)$,

$$\cos(\alpha+\delta)\simeq[\text{sen}(\,\alpha+\delta)-\text{sen}\,\alpha]/\delta,$$

tomando el límite $\delta\to 0$, la expresión se transforma en una igualdad.



$$\lim_{\delta\to 0}\cos(\,\alpha+\delta)\equiv\cos\,\alpha=\lim_{\delta\to 0}\frac{\text{sen}(\alpha+\delta)-\text{sen}\,\alpha}{\delta}.$$

Para acortar la escritura usamos la siguiente notación:

$$\frac{d}{d\alpha}\,\text{sen}\,\alpha = \cos\,\alpha \tag{IV.30}$$

Esta ecuación afirma que el cuociente entre la variación de sen α debida a un incremento infinitesimal de α, (un aumento muy pequeño), dividida por este incremento δ, es un número finito que resulta igual a $\cos\,\alpha$, cuando se toma el límite $\delta \to 0$.

En el gráfico de sen α versus α, la derivada representa geométricamente la pendiente de la tangente a la curva, como se muestra en la Figura.

En forma similar:

Ejercicio

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\cos(\alpha+\delta)-\cos\,\alpha}{\delta} \equiv \frac{d\,\cos\,\alpha}{d\alpha} = -\text{sen}\,\alpha,$$

y con la misma interpretación geométrica, $\dfrac{d\,\cos\,\alpha}{d\,\alpha}$ representa el valor de la tangente en el punto α del gráfico $\cos\,\alpha$ versus α.□

En general, definimos la derivada de una función como:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \tag{IV.31}$$

el significado geométrico corresponde a evaluar la tangente a la función $f(x)$ en el punto x, en un gráfico de $f(x)$ versus x.

Si la tangente a una curva en un punto es una línea horizontal, la derivada en dicho punto es nula: $\tan\,0 = 0$.

Propiedades de los límites.

A continuación establecemos dos propiedades de los límites, que por definición, pertenecen también a las derivadas y que es fundamental conocerlas:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\{f(x+\Delta x)\ \pm\ g(x+\Delta x)\}\equiv$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\ \pm\ \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x). \tag{IV.32}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\{c\cdot f(x+\Delta x)\}\ =\ c\cdot\left\{\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\right\}. \tag{IV.33}$$

En palabras: el límite de una suma de funciones $f(x)$ y $g(x)$ es igual a la suma de los límites de cada una de las funciones, y el límite del producto de una constante c por una función $f(x)$ es igual al producto de la constante por el límite de la función.

En el caso de las derivadas, estas propiedades se escriben

$$\frac{d\,\{f(x)\pm g(x)\}}{d\,x}\ \equiv\ \frac{d\,f(x)}{d\,x}\pm\frac{d\,g(x)}{d\,x}, \tag{IV.34}$$

$$\frac{d\,\{c\cdot f(x)\}}{d\,x}\ \equiv\ c\cdot\frac{d\,f(x)}{d\,x}. \tag{IV.35}$$

En lo que respecta al producto de funciones, en este caso la derivada satisface la *Regla de Leibnitz*:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\bullet g(x)\right]=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\bullet g(x)+f(x)\bullet\frac{d}{dx}g(x). \tag{IV.36}$$

La regla de Leibnitz indica que la derivada de un producto de funciones es igual a la suma de la derivada de una de las funciones, $f(x)$ por la otra función, $g(x)$ más la derivada de la segunda función $g(x)$ por la primera $f(x)$.

Esta operación se puede aplicar a cualquier función. A continuación incluimos una lista de derivadas, sólo usaremos un par de ellas en los capítulos posteriores.

TABLA DE DERIVADAS

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\text{sen}\,\alpha) = \cos\,\alpha \tag{IV.37}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\cos\,\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \tag{IV.38}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\tan\,\alpha) = +\frac{1}{\cos^2\,\alpha} \tag{IV.39}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\cot\,\alpha) = -\frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha} \tag{IV.40}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\alpha}(\csc\,\alpha) &= -\frac{\cos\,\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} \\ &= -\cot\,\alpha\cdot\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}\end{aligned} \tag{IV.41}$$

$$\frac{d}{d\,\alpha}(\sec\,\alpha) = +\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\,\alpha} = \frac{\tan\,\alpha}{\cos\,\alpha} \tag{IV.42}$$

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} \qquad (\,\forall\,\text{r, ya sea entero o real.}) \tag{IV.43}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\alpha\,x}\right) = \alpha\,e^{\alpha\,x} \tag{IV.44}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}. \tag{IV.45}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{\Delta\,x\to 0}\left\{\left[\frac{1}{x+\Delta\,x}-\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{1}{\Delta\,x}\right\} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\left[\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}\right]\frac{1}{\Delta x}\right\} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\left[\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right]\cdot\frac{1}{\Delta x}\right\} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-1}{x(x+\Delta x)}\right] = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Ejemplo

Para n ≡ número entero, pruebe que: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

$$f(x) \equiv x^n, \;\; f(x+\Delta x) \equiv (x+\Delta x)^n,$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \equiv \frac{d}{dx}(x)^n = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{(x+\Delta x)^n-(x)^n\right\}\cdot\tfrac{1}{\Delta x},$$

desarrollando $\left\{(x+\Delta x)^n-(x)^n\right\}$,

$$\frac{d\,[x^n]}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{x^n + n\,x^{n-1}\Delta x/1! + n\,(n-1)\,x^{n-2}[\Delta x]^2/2! + ... - (x)^n\right\}}{\Delta x},$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{nx^{n-1}\Delta x/1! + n\,(n-1)\,x^{n-2}[\Delta x]^2/2! + ...\right\}}{\Delta x},$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2}(\Delta x)/2! + ...\right\},$$

tomando el límite, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Ejemplo

Usando la regla de Leibnitz, encuentre el valor de $\frac{d}{dx}(x\,\text{sen}x)$. Primero intentamos con el método usual:

$$\frac{d}{dx}(x\;\text{sen}\,x) \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\text{sen}(x+\Delta x) - x\;\text{sen}x}{\Delta x},$$

ordenando esta expresión:

$$\frac{d}{dx}(x\;\text{sen}x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[x\;\text{sen}(x+\Delta x) - x\;\text{sen}x] + \Delta x\,\text{sen}(x+\Delta x)}{\Delta x}\right\},$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{x\,\text{sen}(x+\Delta x) - x\,\text{sen}x}{\Delta x}\right\} + \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\Delta x\,\text{sen}(x+\Delta x)}{\Delta x}\right\},$$

sacando x, fuera del límite en el primer término,

$$x\;\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}x}{\Delta x}\right\} + \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\text{sen}(x+\Delta x)\right\},$$

y recordando la expresión de la derivada de la función seno, obtenemos:

$$\frac{d}{d\,x}(x\,\text{sen}x) = x\;\cos\,x + \text{sen}\,x.$$

A continuación encontraremos este mismo resultado pero usando la regla de Leibnitz, para ello identificamos $f(x) \equiv x$, y $g(x) \equiv sen\, x$. Aplicando la fórmula y recordando los valores de la derivada de sen x y x, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(x\ \text{sen}x) = x\,\frac{d}{dx}\text{sen}\,x + \frac{d\,x}{dx}\,\text{sen}\,x, = x\ \cos\ x + \text{sen}\,x$$

Ejemplo

Encontrar el valor de $\dfrac{d}{d\,x}\sqrt{x}$.

$$\frac{d\,\sqrt{x}}{d\,x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta\,x}\right\},$$

multiplicando ambos miembros por el mismo factor:

$$\begin{aligned}\frac{d\,\sqrt{x}}{d\,x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}{[\Delta\,x][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}\right\},\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[x+\Delta x]-x}{[\Delta\,x][\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}\right\},\end{aligned}$$

simplificando:

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}\right\},$$

y tomando el límite:

$$\frac{d}{d\,x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}.$$

Este resultado coincide con la fórmula dada para la derivada de x^r donde r es un número real cualquiera, en particular 1/2.

Aplicaciones de la derivada en la cinemática de una partícula.

Ejemplo

Calcular explícitamente la velocidad en un instante t cualquiera, usando la expresión para $x(t)$ dada en la ecuación IV.7.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[x_0+v_0\cdot(t+\epsilon)]-[x_0+v_0\cdot t]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{v_0\cdot\epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} v_0 = v_0\ . \end{aligned}$$

Este resultado indica que la expresión $x(t)$ que aparece en la ecuación IV.7, efectivamente corresponde al movimiento de una partícula con velocidad constante v_0 (i.e. independiente del tiempo).□

Ejemplo

La altura de un objeto en caída libre, está dada por:

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Usando esta expresión y la definición de la velocidad, ecuación IV.7, calcule la velocidad en un instante t cualquiera.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{z(t+\epsilon)-z(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[z_0-\frac{1}{2}g\cdot(t+\epsilon)^2]-[z_0-\frac{1}{2}g\cdot t^2]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-\frac{1}{2}g\cdot\epsilon\cdot(2t+\epsilon)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g\cdot(2t+\epsilon)}{2} = -g\,t \end{aligned}$$

La velocidad instantánea decrece linealmente a medida que transcurre el tiempo. El signo negativo de la velocidad indica que la partícula se está desplazando en el sentido negativo del eje z.

Sin embargo, la *rapidez* –definida como el módulo de la velocidad de la partícula–, aumenta a medida que transcurre el tiempo: $|v(t)| = g\,t$.

El movimiento descrito por la función $z(t)$ de este ejemplo corresponde a la caída libre (es decir, sin que otras interacciones actúen durante el trayecto), de una partícula en el campo gravitacional terrestre desde una altura z_0.

Si la velocidad de una partícula cambia a medida que transcurre el tiempo, entonces la partícula tiene una aceleración.□

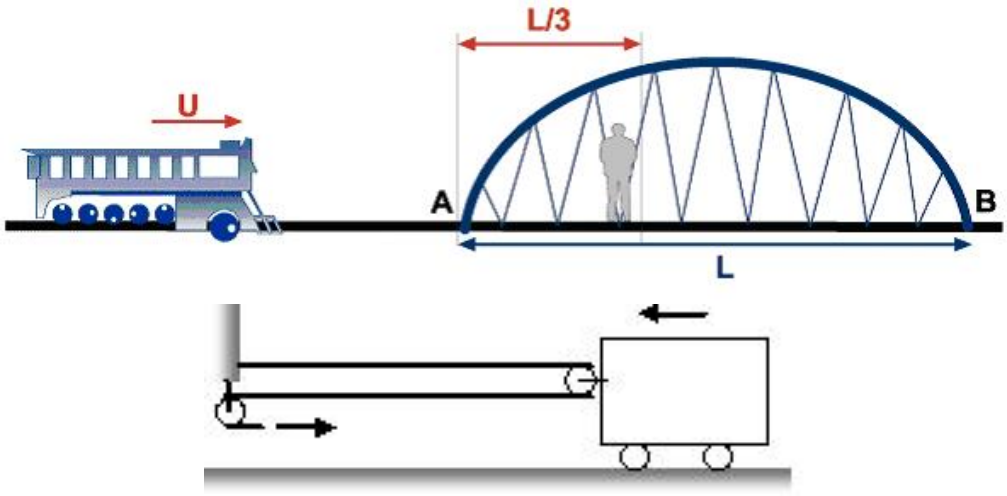
Si la tangente a la curva que representa la posición de un objeto en función del tiempo *no* exhibe saltos *abruptos*, la velocidad instantánea está bien definida en cada punto de la trayectoria.

Una variación abrupta de la pendiente en un cierto punto del gráfico posición versus tiempo revela la existencia de un cambio repentino en la magnitud de la velocidad. El valor de la tangente (o la velocidad) en la vecindad de este punto, depende del lado por el cual nos aproximemos a ella. En definitiva no tiene un valor único.

En cualquiera de estas situaciones, tenga o no cambios abruptos, siempre podemos graficar la velocidad en función del tiempo.

IV.9. EJERCICIOS

1.– Fortunato camina sobre un puente de la vía férrea de largo **L**, que une los puntos **A** y **B**. Repentinamente, cuando se encuentra a $1/3$ del extremo **A** del puente, escucha el silbido del tren proveniente del lado **A** del puente. Sabe que el tren viaja con rapidez **u**. Si, desde su posición en el instante que escucha el silbido, Fortunato corre hacia el extremo **A**, el tren lo alcanza en **A**. Si Fortunato corre hacia el extremo opuesto **B**, el tren lo alcanza en **B**.
En base a estos datos
a.- Dibuje un diagrama espacio-tiempo que ilustre las dos posibilidades que enfrenta Fortunato.
b.- Determine la razón entre las velocidades de (que suponemos constante) de Fortunato y el tren.



2.– Un bloque es arrastrado hacia una muralla mediante una cuerda y un par de poleas, como se ilustra en la figura. La longitud de la cuerda es **2 L** y la separación inicial entre el bloque y la muralla es **L**. Determine el tiempo de encuentro entre la punta de la cuerda y el bloque si:

a.- El extremo de la cuerda se mueve con velocidad constante,

b.- El extremo de la cuerda se mueve con aceleración constante partiendo del reposo.

Nota: ¿Cuál es el efecto del radio de las poleas en este problema? Afecta el resultado considerarlas de radio despreciable.

3.– Un auto viaja entre dos ciudades A y B . De ida $(A \to B)$ viaja a 90 km/hr y de vuelta $(B \to A)$, por falta de visibilidad, lo hace a 60 km/hr.

¿Cuál es la *rapidez media* (no su velocidad media), para el viaje de ida y vuelta?

4.– Una persona conduce un automóvil durante 10 km a una velocidad de 90 km/h y luego otros 10 km a 70 km/h. ¿Cuál es la rapidez media durante el trayecto de 20 km?

5.– Una columna de hombres de largo **d** marchan en línea recta, uno detrás de otro. Un oficial recorre la columna comenzando desde el último hombre. Se desplaza con rapidez constante hasta que alcanza al que encabeza la columna. En ese instante se devuelve con la misma rapidez, hasta que encuentra el último hombre de la columna. Durante este intervalo la columna de hombres ha permanecido marchando en formación con la misma rapidez inicial y se ha desplazado una distancia **d** desde el instante en que el oficial inició su revista de la tropa. De esta manera el hombre que estaba al final de la columna ocupa ahora el sitio donde estuvo el primer soldado cuando el oficial se dispuso a revisar la tropa.

a.- Utilizando un gráfico único dibuje un esquema de la situación que le permita plantear el problema. Suponga que la velocidad del oficial es **U** y la de los soldados **V**. Recuerde que no conocemos el valor de ninguna de las dos.

b.- Escriba los datos y las incógnitas de este problema. Anote las ecuaciones que se desprenden de la descripción del problema. El gráfico anterior es de gran ayuda en esta tarea.

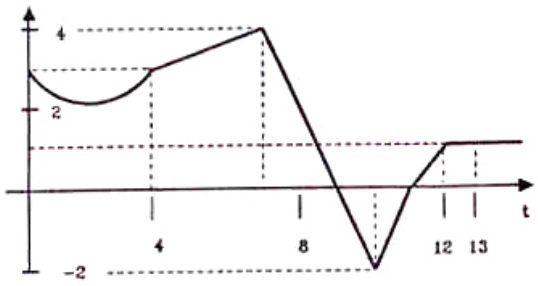
c.- Encuentre la razón entre los valores de **U** y **V**.

d.- ¿Qué distancia recorrió el oficial durante este ciclo? (Desde que partió hasta encontrarse con el último soldado nuevamente).

e.- Escriba un problema con otro enunciado PERO cuya resolución sea la misma utilizada en este problema. (Piense, por ejemplo en el metro a baja velocidad en una estación y un pasajero con un excelente estado físico y ánimo de sobresalir...)

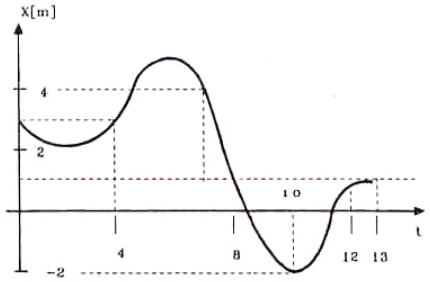
6.– La Figura muestra la posición de una partícula en función del tiempo. La curva es parte de una parábola entre t =0 y t= 4 s. Encuentre la velocidad media durante los siguientes intervalos de tiempo:

a) 0 s $< t <$ 4 s.
b) 7 s $< t <$ 10 s.
c) 0 s $< t <$ 13 s.
d) 10 s $< t <$ 13 s.



7.– A partir del gráfico de la Figura: En qué instantes o intervalos:

a) La velocidad (instantánea) es cero.
b) La velocidad es positiva.
c) La velocidad es negativa.
d) El módulo de la velocidad es máximo.
e) La velocidad es constante.
f) La aceleración es positiva.
g) La aceleración es negativa.
h) Si en el instante t_0 la partícula está en el origen, ¿en qué instante la distancia medida desde el origen será máxima?



8.– Basándose en la Figura:

a) *Estime* la velocidad media en el intervalo de $2\ s < t < 10\ s$.

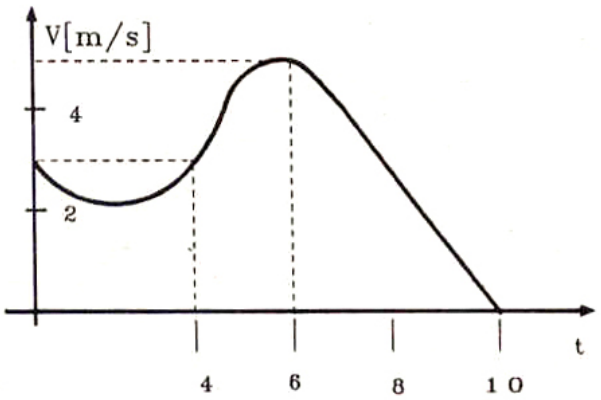
b) Encuentre la velocidad instantánea para $t = 10\ s$.

c) ¿Indique para qué valor (o valores) de t, la velocidad instantánea de la partícula es nula?

d) ¿En qué instante la rapidez es máxima?

e) ¿En qué instante la aceleración es nula?

Respuesta: e) En los instantes $t = 2$ s y $t = 6$ s.



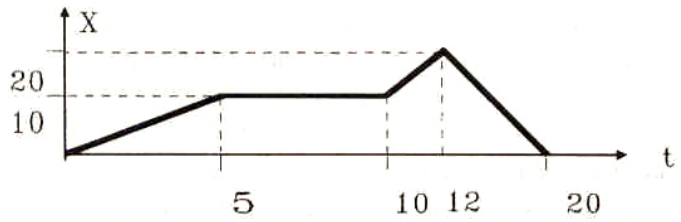
9.– Dos trenes, A y B, están separados inicialmente por una distancia de 60 Km y viajan a su encuentro con la misma rapidez: 30 km/hr cada uno. Desde A parte una paloma mensajera que se encuentra con el tren B 10 minutos después. Calcule la velocidad con que vuela la paloma *con respecto al tren A*.

10.– En el gráfico se detalla la posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x. De acuerdo a la información contenida en el gráfico, señale:

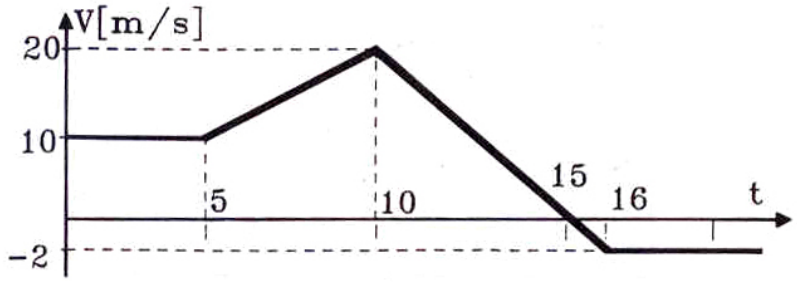
a) Entre qué instantes el movimiento se realiza con velocidad constante.

b) En qué instante el móvil permanece detenido.

c) Calcule la distancia total recorrida desde $t = 0$ hasta $t = 15$ s.



11.– A partir del gráfico *velocidad* versus *tiempo* de una partícula que viaja a lo largo del eje x, señale:



a) ¿Entre qué instantes el movimiento se realiza con velocidad constante?

b) ¿Cuándo es el movimiento acelerado?

c) ¿En qué instante el móvil está detenido?

d) Calcule la distancia total recorrida desde $t = 0$ hasta $t = 16$.

12.– Un automovilista (viajando de Norte a Sur) pasa a exceso de velocidad frente al retén de Talca. 5 minutos más tarde sale en su persecusión un policía motorizado a una velocidad de 107 Km/h.

Lo alcanzó 87 minutos después que el infractor pasó frente al retén.

¿Cuál era la velocidad del infractor?

13.– Un pasajero corre con una velocidad de 4 m/s para lograr alcanzar el tren. Cuando está a una distancia d de la portezuela más próxima, el tren comienza a moverse con una aceleración constante $a = 0,4\ m/s^2$ alejándose del pasajero.

a) Si $d = 12$ m, y el pasajero sigue corriendo ¿Alcanzará a subirse al tren?

b) Haga un gráfico de la posición $x(t)$ del tren escogiendo $t = 0$ para $x = 0$. En el mismo gráfico dibuje la función $x(t)$ correspondiente al pasajero para diversos valores de la distancia de separación d, incluyendo $d = 12$ m, y también hallar d_c, el valor crítico, para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.

c) Para la separación crítica d_c.

-¿Cuál es la velocidad del tren cuando el pasajero lo alcanza?

-¿Cuál es su velocidad media en este intervalo?

-¿Cuál es el valor de d_c?

14.– Considere dos varillas muy largas. Una horizontal, fija y la otra formando un ángulo ϕ, constante, con la primera y moviéndose verticalmente con rapidez v_0 constante. Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas.

15.– Se deja caer una piedra, sin velocidad inicial, desde el borde superior de un pozo y se espera hasta escuchar el ruido que ésta produce al chocar con el agua 5 s después.

Determine la profundidad del pozo, teniendo en cuenta que el valor de la velocidad del sonido es 340 m/s.

16.– Un monje sale de su Monasterio con la aparición del Sol en el horizonte y se dirige hacia una Villa cercana ubicada en un cerro. Camina todo el día, con breves descansos, llegando a la Villa al atardecer. Al amanecer del siguiente día, retorna al Monasterio siguiendo el mismo sendero del día anterior para llegar de regreso al atardecer.

¿Cuál es la probabilidad que al bajar pase por un mismo lugar a la misma hora a la cual pasó, en sentido contrario, el día anterior?

Indicación: Describa ambos trayectos en un solo gráfico e investigue el significado del punto de intersección.

17.– Dos automóviles **A** y **B**, se encuentran detenidos a una distancia de 30 km el uno del otro. Repentinamente (en t=0) , **A** parte del reposo con una aceleración constante de 10 m/s^2, un segundo más tarde parte al *encuentro* el automóvil **B**, con una rapidez constante de 10 m/s.

a.- ¿Qué distancia ha recorrido cada uno de ellos, hasta el instante en que se encuentran?

b.- ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse?

c.- Utilizando un solo gráfico, dibuje la posición de ambos automóviles en función del tiempo.

18.– Un niño *suelta* una pelota desde una altura h. La pelota parte del reposo, choca más tarde con el suelo, rebotando con una rapidez *proporcional* a la que tenía en el instante que tocó el suelo. Es decir: $|V_{\text{rebote}|} = \alpha\,|V_{\text{llegada}}|$, con $(0 < \alpha < 1)$.

La pelota sube y luego cae para volver a rebotar. La rapidez en el rebote cumple la misma relación señalada para el primer rebote. De esta forma, continúa el movimiento, con sucesivos rebotes, hasta que la pelota prácticamente ya no se mueve.

Considerando que todo estos rebotes ocurren manteniendo el movimiento en la dirección vertical, calcule:

a) La altura que alcanza la pelota después del primer rebote.

b) La altura que alcanza la pelota después del segundo rebote.

c) La altura que alcanza la pelota después del k-ésimo rebote.

d) La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el k-ésimo rebote.

e) La distancia total recorrida por la pelota hasta que se detiene (tome $k \to \infty$ en la expresión anterior)

19.– Los buses de Santiago a Valparaíso salen desde ambos puntos cada 15 minutos. Una vez en la carretera los buses se desplazan con rapidez constante de $100km/h$ de acuerdo a lo permitido por la ley. Por otra parte, Ud. viaja en su automóvil hacia Valparaíso con una rapidez de $120km/h$.

a.- Dibuje en un gráfico distancia versus tiempo, la trayectoria de los vehículos involucrados en este problema.

b.- Calcule el intervalo que transcurre entre encuentros consecutivos con buses que viajan en su misma dirección y sentido.

c.- Calcule el intervalo que transcurre entre encuentros consecutivos con buses que viajan hacia santiago.

20.– Dos locomotoras viajan con rapidez V_0. En el instante t=0 están separadas por una distancia d, y viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto. En dicho instante, de una de ellas, parte una paloma con velocidad U *con respecto a la tierra*, y tal que $(U > V_0)$. La paloma viaja en línea recta hasta alcanzar la otra locomotora. Una vez que la toca, *vuelve* hasta alcanzar la primera y así sucesivamente hasta que ambos trenes chocan.

a) Haga un gráfico de *posición* versus *tiempo*, que describa conjuntamente la trayectoria de los dos trenes y la paloma.

b) ¿Qué distancia recorrió la paloma desde que dejó el tren por primera vez hasta que éstos se encontraron?

Use los siguientes valores numéricos: $V_0 = 25$ km/h, $U = 30$ km/h y $d = 23$ km.

21.– Un super carguero se acerca al puerto con rapidez **U**. Para permanecer el menor tiempo posible en el puerto comienza su descarga mucho antes de llegar a puerto, enviando una barcaza cargada al puerto. La barcaza va y vuelve con una rapidez $\mathbf{V} > \mathbf{U}$. Debe esperar en el muelle un intervalo **T**. La distancia inicial desde donde partió la barcaza en su primer viaje

es **D**.

Dibuje un gráfico que ilustre la situación. Calcule por cuanto tiempo la barcaza puede viajar. Coin esto estime cuántos bviajes puede hacer. El capitán es muy cuidadoso y calcula la distancia **D** a la cual envía a la barcaza de tal forma que cuando el barco llega a puerto, la barcaza recién terminó su descarga. ¿Cómo lo hizo el capitán?

22.– Un automóvil puede aumentar su velocidad con una aceleración máxima a_1 y frenar con una desaceleración máxima a_2. Cuando su velocidad es mayor que un valor v_1, su consumo de combustible es q_1 lts/km. Si su velocidad es menor que v_1, su consumo es de $q_0 = 2\,q_1$ lts/km .

En un viaje donde debe recorrer L km:

a) ¿Cómo se debe regular la velocidad del vehículo durante la trayectoria para recorrerla en un *tiempo mínimo y con un consumo máximo*? Explique su respuesta a través de un gráfico.

b) La misma pregunta, pero en el caso de interés: con un *tiempo y consumo mínimos*. ¿Calcule cuál es el consumo total en este caso? Use gráficos en su razonamiento.

23.– Un profesor viaja al interior de un ascensor que sube con velocidad constante. En un descuido, al profesor se le escapan las llaves de su mano. Al tocar el piso del ascensor, las llaves se encuentran a la misma altura que en el instante en que se desprendieron de la manos del profesor.

En un mismo gráfico ilustre cualitativamente, la trayectoria de las llaves y la del piso del ascensor. (Extraído del libro de Mazur).

24.– Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio que mide 25 m de altura. La rapidez inicial de la pelota es 12.0 m/s. Al mismo tiempo, una persona ubicada en la base del edificio, comienza a correr por la calle acercándose al edificio desde una distancia de 8 m.

a.- ¿Cuál debe ser la rapidez media de esta persona, para que logre atrapar la pelota en la base del del edificio? (Suponga que la persona atrapa la pelota 2 m antes que llegue al piso).

b.- Suponga que la persona que lanza la pelota desde la azotea del edificio, es más gentil y utilizando la misma componente vertical de la velocidad inicial de la parte a), lanza la pelota de manera que el tipo de la calle NO deba correr a alcanzarla y la reciba en sus manos, a un metro del piso. ¿Cuál es el valor del ángulo con el cual lanzó la pelota? ¿Cuál es la magnitud de la velocidad con que lanza la pelota? (No necesita dar el valor exacto del ángulo, pero atrévase y estímelo. Comente qué lo llevó a elegir ése valor.)

25.– Una partícula parte del reposo y soporta una aceleración como la que se muestra en la Figura.

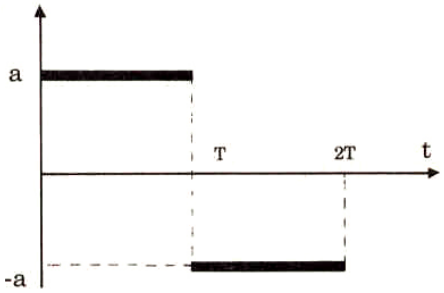
a.- Dibuje el gráfico de *velocidad* versus *tiempo* y el gráfico *posición* versus *tiempo* para este movimiento.

b.- ¿Cuál será su máxima velocidad durante los $2T$ s?
¿Qué distancia recorre durante este intervalo?

c.- Un alumno asegura que la distancia recorrida por este objeto es la misma que recorrería si el valor de la aceleración dependiera linealmente del tiempo, tal que fuera inicialmente $2\,a_o$ en $t = 0$ y, manteniendo una pendiente negativa, alcanzara el valor $-2\,a_o$ en $t = 2\,T$. Su argumento es que la aceleración media en ambo casos es la misma (cero si consideramos el intervalo $2\,T$.

i.- Dibuje en forma cualitativa el gráfico correspondiente a esta aceleración vs tiempo.
ii.- Dibuje en forma cualitativa el gráfico correspondiente a la velocidad vs tiempo,

iii.- Sin intentar resolver esta parte del problema en forma cuantitativa, escriba su opinión (positiva, negativa o faltan datos...y por qué) con respecto a la veracidad de lo afirmado por este alumno.



26.– Un ascensor rápido circula entre el piso 30 y el 1, que están separados por 150 metros. Para comodidad de los pasajeros se impone un límite a la aceleración y desaceleración máxima del ascensor: 3,7 m/s^2. Por otra parte la rapidez máxima que puede alcanzar este ascensor, sin transgredir las normas de seguridad, es 6,0 m/s.

a.- ¿Determine el tiempo mínimo que necesita para viajar entre el piso 1 y el 30?

b.-Determine el valor de la velocidad media para llevar a cabo dicho recorrido.

27.– Una bola de acero se deja caer desde el techo de un edificio. La velocidad inicial de la bola es nula y la aceleración **g** es dato. Un observador parado frente a un ventanal de altura **h**, unos pisos más abajo, logra establecer que la bola cruzó en **T** segundos la altura de su ventana. La bola continúa cayendo libremente, hasta chocar con el piso, rebota y sale inmediatamente con la misma rapidez con la cual impactó el piso, hacia el techo del edificio.

Reaparece en la parte baja de la misma ventana, $\mathbf{T}_1$ segundos después de haber desaparecido de allí mismo.

a.- Conociendo la altura de la ventana **h** y el tiempo que la esfera demora en cruzarla durante su caída **T** segundos, encuentre la velocidad media de la esfera mientras cruza frente a la ventana.

b.- Si la rapidez con la cual desaparece la esfera en la parte baja de la ventana la definimos como $\mathbf{V}_B$ (NO conocemos su valor, este no es un dato!): ¿Con qué velocidad reaparece la esfera en la parte baja del ventanal, $\mathbf{T}_1$ segundos después de desaparecer por allí mismo y rebotar en el piso?

c.- ¿Cuál es la altura del edificio?

28.– Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación $z(t) = -v_0 \cdot (t - t_0)^2 + z_0$, con $z_0 = 125$ m, $t_0 = 5$ s y $v_0 = 5$ m/s.

a) Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 12\ s$.

b) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?

c) Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes t=0 s, t=2 s, t=4 s, t=6 s, t=8 s y t=10 s. Grafique su resultado.

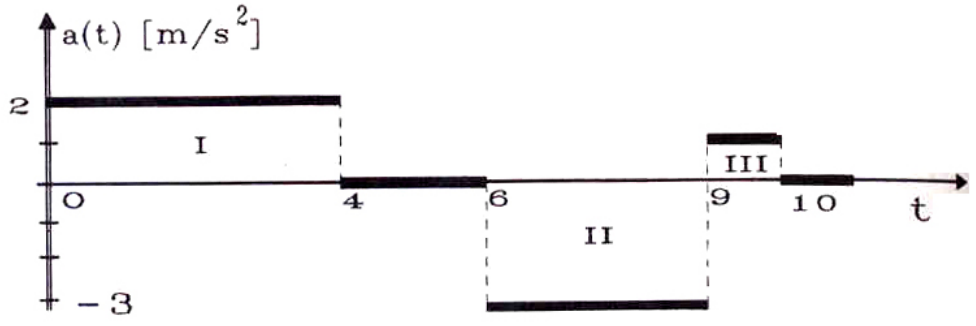
29.– Desde un puente de $60\ m$ de altura se deja caer una piedra. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo $1\ s$ más tarde. Ambas llegan simultáneamente al río. ¿Cuál fue la velocidad impartida inicialmente a la segunda piedra? Desprecie el roce del aire.

30.– La Figura muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo.

a) Si en $t = 0\ s$ la partícula está en reposo, encuentre su velocidad en cada instante posterior. Haga un gráfico.

b) Calcule el tamaño de las áreas I, II y III. ¿Qué unidades tienen? ¿Qué relación hay entre estas áreas y la parte a) de este problema?

c) Repita lo hecho en la parte a) pero asumiendo que en el instante $t = 0$ la partícula tiene una velocidad $v_0 = -8\ m/s$. Grafique su respuesta.



31.– Un cohete se dispara verticalmente, elevándose durante un minuto con una aceleración constante de 20 m/s^2. En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.

a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?

b) ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despega hasta que vuelve a caer sobre la plataforma de lanzamiento?

c) Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.

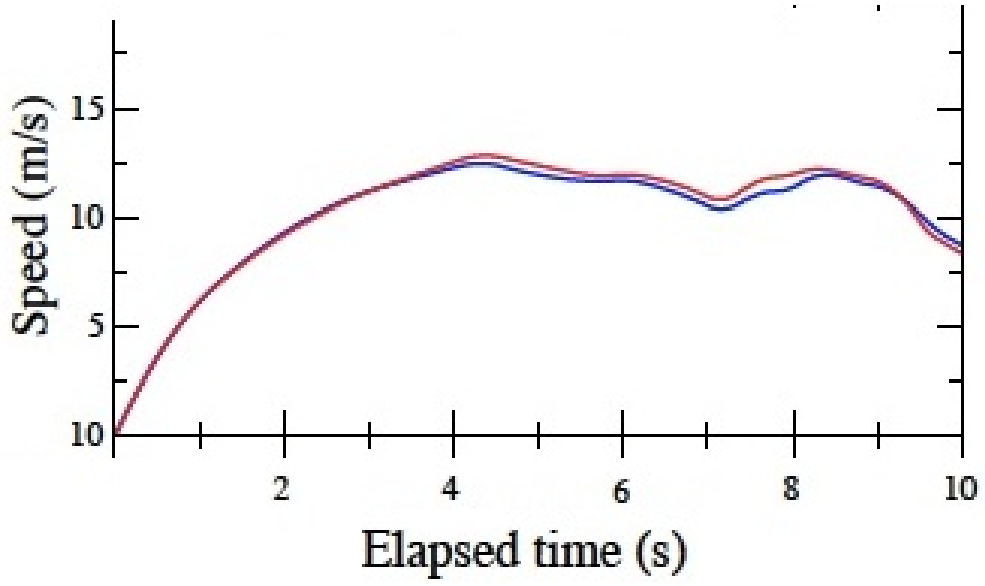
32.– Usain Bolt logró un récord mundial sobre los 100 m planos. Un grupo de físicos (ver referencia: arXiv:0809.0209v2 [physics.pop-hp] 2 Sept 2008), tomó un registro de la posición de Bolt en el transcurso de la carrera.

a.- A partir de dicho registro, obtenga la rapidez máxima de Bolt durante la carrera.

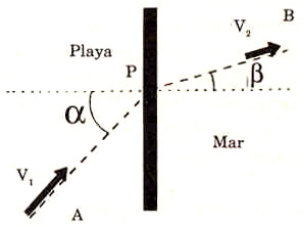
b.- Estimando el área bajo la curva en el gráfico de la velocidad vs tiempo, encuentre la posición de Bolt en función del tiempo. Haga un gráfico aproximado de la posición a lo largo del tiempo de la carrera.

c.-Obtenga la aceleración máxima de Bolt indicando en qué posición ocurrió.

d.- Como sabemos, Bolt comenzó a celebrar su triunfo cuando estaba ya cerca de la meta, ¿Puede Ud. distinguir ese pequeño intervalo a partir del gráfico dado?



33.– Un salvavidas ubicado en el punto A en la playa escucha el grito de auxilio de un bañista ubicado en B. La velocidad máxima del salvavidas en la arena es v_1 y puede nadar con una velocidad v_2.
Recordando que el salvavidas debe llegar lo antes posible al rescate, indique:



a.- ¿Qué trayectoria le tomará el menor tiempo posible, en cada uno de los siguientes tres casos?

i) Si v_1 es muchísimo mayor que v_2.

ii) El caso inverso, v_2 es muchísimo mayor que v_1.

iii) Cuando ambas velocidades son iguales.

Nota

Tome su decisión a partir del estudio de tres o cuatro puntos ubicados en la línea divisoria entre la playa y el mar. En cada caso calcule el tiempo empleado en recorrer la trayectoria total.

b.- Cuando ambas velocidades son diferentes y no cumplen las relaciones extremas indicadas en la parte a), encuentre la posición del punto óptimo, P, en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para recorrer el trayecto de A a B en el menor tiempo posible.

Demuestre que en estas condiciones se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Esta expresión es análoga a la ley de Snell, que describe la refracción de un rayo de luz al pasar de un medio a otro diferente.

34.– Para cada una de las siguientes expresiones de la aceleración $a(t)$ de una partícula (a en m/s^2 y t en s), encuentre la expresión más general para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.

a) $a(t) = a_0,$ donde a_o es una constante,

b) $a(t) = a_0 \cos \omega t$ con a_0 y ω constantes.

35.– Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por:

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2} \ \ [m]$$

a) Grafique $z(t)$ en el intervalo $-4\ s < t < +4\ s$.

b) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad .$$

c) Grafique $v(t)$.

36.– Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por:

$$z(t) = t - 4\cos t \ \ [m]$$

a) Grafique $z(t)$ en el intervalo $0< t < 6$ s.

b) A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

i) ¿En qué instante la velocidad es nula?

ii) ¿En qué instante la partícula se encuentra en el origen?

iii) ¿En qué intervalos la velocidad es negativa?

iv) ¿En qué intervalos la aceleración es positiva?

c) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \quad .$$

d) Grafique $v(t)$ encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:

i) ¿En qué instante la velocidad es nula?

ii) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?

iii) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?

(Compare las respuestas con aquellas de la parte b)).

37.– Usando geometría y las aproximaciones usuales para ángulos pequeños, demuestre que:

$$\frac{d\,\tan\,\theta}{d\,\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Use el triángulo Δ ABC de la Figura y recuerde que $\Delta\,\theta$ es muy pequeño.

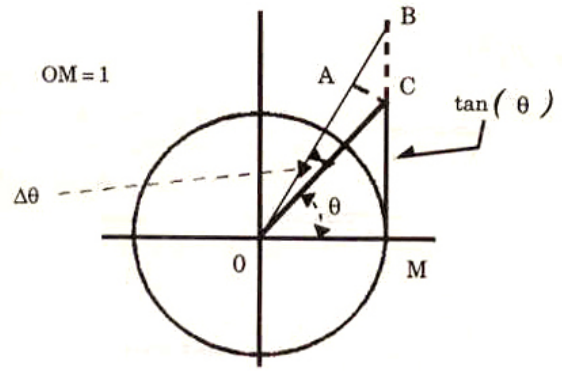
38.– Para cada una de las expresiones $s(t)$, de la posición de una partícula en función del tiempo, encuentre, analíticamente, la velocidad instantánea.

a) $s(t) = a\,t^2 + b\,t + c$,

b) $s(t) = a\,t^\alpha$,

c) $s(t) = a\,\cos\left(\omega\,t + \beta\right)$.

En las ecuaciones anteriores a, b, c, ω, α y β son constantes.



39.– La posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) es:

$$x(t) = a\cos(\omega t).$$

a) Encuentre, analíticamente, la velocidad de la partícula y su aceleración. Grafique $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en un mismo gráfico.

b) Del gráfico anterior, encuentre la relación que existe entre la posición $x(t)$ y la aceleración $a(t)$.

40.– Consideremos el movimiento de una esfera en un medio viscoso (en ausencia de fuerzas gravitacionales). La aceleración que sufre la esfera es proporcional a su velocidad pero en dirección contraria, es decir $\vec{a}(t) = -\eta\vec{v}(t)$, donde η es una constante. Supongamos que $\eta = 0{,}01\ s^{-1}$ y la velocidad inicial de la esfera $|\vec{v}_0| = 50\ m/s$. Encuentre numéricamente la distancia $s(t)$ recorrida por la esfera y grafíquela. Para resolver el problema note que si Δ es un pequeño intervalo, entonces:

$$\begin{cases} v(t+\Delta) \simeq v(t) + a(t)\,\Delta \\ s(t+\Delta) \simeq s(t) + v(t)\,\Delta \end{cases}$$

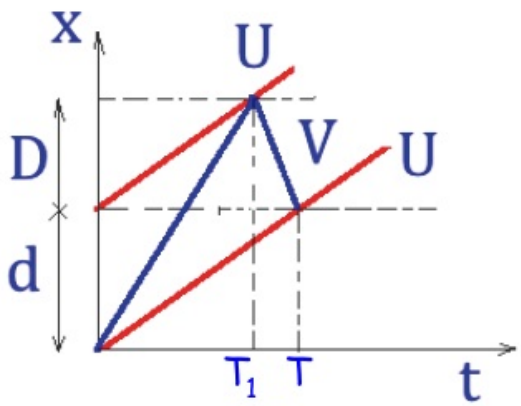
IV.10. Problemas Resueltos

IV.10.1. Ejemplo

Una columna de largo **d** de hombres marcha en línea recta, uno detrás de otro. Un oficial recorre la columna comenzando desde el último hombre. Se desplaza con rapidez constante hasta que alcanza al que encabeza la columna. En ese momento se devuelve con la misma rapidez, hasta que de nuevo se topa con el último hombre de la columna. Durante este intervalo la columna de hombres ha permanecido en movimiento con rapidez constante y se ha desplazado una distancia **d** desde

el instante en que el oficial comenzó a adelantarse en la columna. De esta manera el hombre que estaba al final ocupa el sitio donde estuvo el primer soldado cuando el oficial se dispuso a revisar la tropa.

a.- Utilizando un gráfico único dibuje un esquema de la situación que le permita plantear el problema. Suponga que la velocidad del oficial es **U** y la de los soldados **V**.
b.- ¿Qué distancia recorrió el oficial durante este ciclo?
c.- Encuentre la razón entre los valores de **U** y **V** .
d.- Escriba un problema con otro enunciado PERO cuya resolución sea la misma utilizada en este problema. (Piense, por ejemplo en el metro...)



Datos: d, Información contenida en el enunciado.
Incógnitas: **U**, **V**, $\mathbf{T}_1$, **T**, **D**.
Ecuaciones

1. U T = d. Camino que recorre el último soldado. Es una condición del problema.
2. U T_1 = D. Camino recorrido por el primer soldado antes de encontrarse con el oficial. Es una definición de **D** y $\mathbf{T}_1$.
3. V T_1 = (d + D). Trayecto recorrido por el Oficial hasta justo antes de alcanzar al primer soldado. es una condición establecida en el enunciado.
4. V (T - T_1) = D. Camino recorrido por el Oficial en su retorno y encuentro con el último soldado. También es una condición adicional impuesta en el enunciado.

Disponemos de cuatro ecuaciones pero sólo tres de ellas son independientes. Las dos últimas, como se indica son condiciones impuestas en el enunciado. De las dos primeras, la primera debe ir porque lo establece el enunciado. Por ejemplo, el enunciado podría imponer que el último soldado se encontrara con el oficial después de avanzar 2**d**. Los resultados serían diferentes a los expuestos aquí, en ese caso. Sin embargo, con esta nueva condición la segunda ecuación todavía está vigente, porque define **D** y $\mathbf{T}_1$. Que consideremos solo tres de las ecuaciones como independientes no significa que no podemos usar la segunda ecuación. Sólo implica que tenemos menos ecuaciones de las escritas como tales.

Existen cinco incógnitas. Sólo podemos encontrar tres de ellas. Para disminuir las incógnitas a tres, optamos por determinar sólo la razón entre las dos únicas velocidades que aparecen en el problema: **U/V**. y sólo la razón entre los dos tiempos $\mathbf{T/T}_1$.

$$\frac{Ec.\,2.-}{Ec.\,3.-} \Rightarrow \frac{U}{V} = \frac{D}{d+D} \Rightarrow D\left(\frac{U}{V} - 1\right) = -d\left(\frac{U}{V}\right) \Rightarrow D = \frac{(U/V)}{1-U/V} \times d \quad \text{(IV.46)}$$

Pero

$$V\,T = [d + 2D]\,, \text{obtenida sumando las ecuaciones } 3. - \ y\ 4.-)$$

$$\text{De la ecuación 1.- : } \ T = \frac{d}{U} \Rightarrow \frac{V}{U}d = d + 2D \Rightarrow D = \left(\frac{V}{U} - 1)\right)\frac{d}{2} \quad \text{(IV.47)}$$

De las ecuaciones (IV.46) y (IV.47), obtenemos una expresión que contiene sólo U/V,

$$\left(\frac{V}{U} - 1\right)\frac{1}{2} = \frac{U/V}{1 - \dfrac{U}{V}} \Rightarrow \frac{V}{U}\left(1 - \frac{U}{V}\right) = \frac{2\,(U/V)}{1 - U/V},$$

Ordenando los términos obtenemos

$$\left(1 - \frac{U}{V}\right)^2 = 2\left(\frac{U}{V}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{U}{V}\right)^2 + \frac{2\,U}{V} - 1 = 0$$

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2}\,(\sqrt{8} - 2) = \sqrt{2} - 1. \quad \text{(IV.48)}$$

Usando este valor de U/V y la ecuación (IV.46) obtenemos el valor de D en función del dato d,

$$D = \frac{d}{\sqrt{2}}. \quad \text{(IV.49)}$$

Para encontrar $\mathbf{TT}_1$, hacemos la razón entre las ecuaciones 1.- y la ecuación 3.- y reemplazamos los números obtenidos previamente para llegar al resultado.

$$\frac{\text{Ec. 1}}{\text{Ec. 3}} = \frac{U\,T}{V\,T_1} = \frac{d}{d + D} \Rightarrow \frac{T}{T_1} = \sqrt{2}. \quad \text{(IV.50)}$$

IV.10.2. Ejemplo (Revista Quantum, Julio–Agosto 1992, pag. 27.)

A continuación plantearemos un caso con aceleración variable y que es posible resolver siguiendo un método similar al descrito en esta sección.

Una hormiga sale de su nido y se aleja en línea recta con una velocidad que resulta ser inversamente proporcional a la distancia que la separa de su origen. Cuando la hormiga está en el punto

A, a una distancia de un metro del nido, su velocidad es de 2 cm/s. ¿Cuánto tiempo le tomará a la hormiga ir desde el punto A hasta B, situado a dos metros del nido?

Designamos el nido como el origen de coordenadas. De esta forma la velocidad es inversamente proporcional a la distancia recorrida, entonces:

$$v = \frac{k}{x}, \quad \text{k = constante de proporcionalidad.}$$

Para determinar la constante k, usamos las condiciones iniciales:

$$v_o = 0,02\text{m/s}, \quad x_o = 1 \text{ m}, \quad \Rightarrow k = 0,02 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right].$$

A continuación usaremos el método gráfico para resolver este problema.

Como no conocemos la velocidad en función del tiempo, no podemos estimar el tiempo necesario para cubrir la distancia desde A hasta B, a partir del área encerrada por esta curva.

El área bajo la curva *velocidad* versus *distancia*, puede ser calculada directamente a partir de los datos, pero no corresponde a una cantidad física conocida, como apreciamos a partir de sus dimensiones: $v(x) \times \Delta x$ = $\left[\frac{m^2}{s}\right]$.

Si logramos ubicar una cantidad que tenga las dimensiones de tiempo y que sea posible graficarla, hemos resuelto el problema. La más directa es $1/v(x)$ versus x. A partir de las dimensiones del área encerrada bajo esta curva, tenemos: $1/v(x) \times \Delta\, x$ = $\left[\frac{1}{\text{m/s}}\,\text{m}\right] = [\text{s}]$.

En este gráfico la ordenada es $y \equiv 1/v(x) = x/k$, de modo que es la ecuación de una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es $1/k$. El valor del área encerrada por el trapecio que, a su vez corresponde al tiempo empleado en viajar entre A y B, es:

$$T_{A\to B} = \left[\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B}\right] \times \text{ distancia recorrida} = \frac{x_B^2 - x_A^2}{2\,k}.$$

Solución numérica.

Es posible resolver este problema usando el método numérico propuesto a continuación. De hecho, se puede encontrar el valor de la posición en función del tiempo, para cualquier instante.

A partir de las diferencias finitas, la velocidad se define como:

$$\bar{v}_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t},$$

donde tomamos el mismo Δt para cada uno de los intervalos y asociamos una velocidad media $\bar{v}_i$ al intervalo $[x_i,\, x_{i+1}]$, cuyo valor es posible calcularlo en este caso, puesto que conocemos la

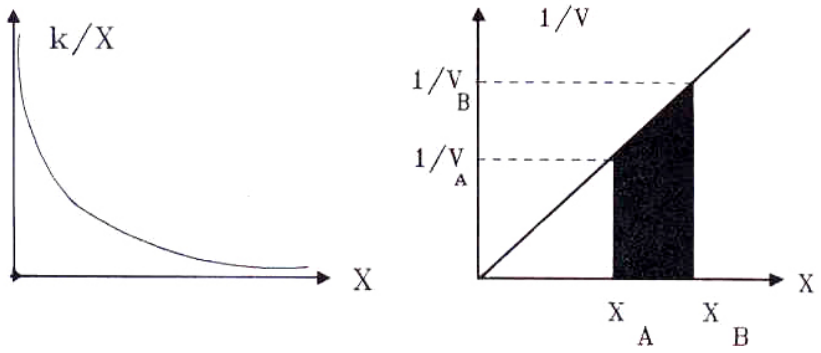


Figura IV.18: Diagrama de la *velocidad* versus *desplazamiento* e *inverso de la velocidad* versus *desplazamiento* para la hormiga.

velocidad en función de la posición:

$$\bar{v}_i = \frac{k}{x_i[\text{promedio}]} = \frac{k}{\frac{x_{i+1}+x_i}{2}} = \frac{2\,k}{x_{i+1}+x_i}.$$

Reemplazando esta última expresión en la definición de $\bar{v}$ obtenemos una fórmula que relaciona x_{i+1} con x_i

$$x_{i+1}^2 - x_i^2 = 2\,k\,\Delta t.$$

Si escribimos esta ecuación para cada uno de los intervalos de tiempo convenientemente, podemos encontrar su solución:

$$\begin{aligned}
x_1^2 - x_o^2 &= 2\,k\,\Delta t, \text{ con } \Delta t = \text{constante} \\
x_2^2 - x_1^2 &= 2\,k\,\Delta t, \\
x_3^2 - x_2^2 &= 2\,k\,\Delta t, \\
\vdots &= \vdots \\
x_N^2 - x_{N-1}^2 &= 2\,k\,\Delta t, \\
\text{sumando:}\quad x_N^2 - x_o^2 &= 2\,k\,N\,\Delta t.
\end{aligned}$$

El tiempo transcurrido desde que la hormiga estaba en x_o hasta que llegó a la posición $x \equiv x_N$ es $t = N\,\Delta t$. Como x_N es un punto arbitrario, esta expresión se escribe, en forma general:

$$x^2(t) = x_o^2 + 2\,k\,t.$$

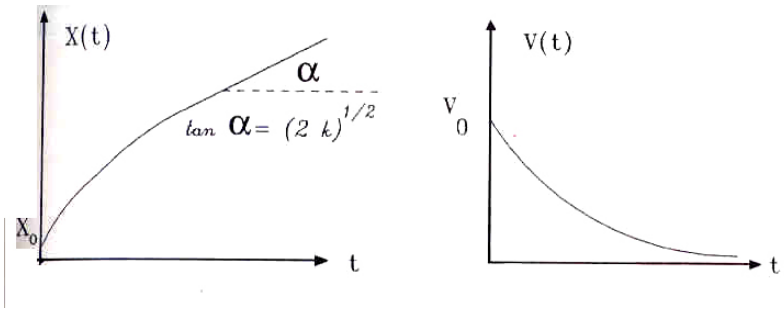


Figura IV.19:

Hemos obtenido la posición en función del tiempo para este movimiento. Es más, esta expresión coincide con el resultado exacto, como se puede verificar usando cálculo diferencial.

Al conocer la velocidad como función de la posición, también conocemos la velocidad en función del tiempo, al reemplazar x por su dependencia en el tiempo:

$$\left[\frac{k}{v(t)}\right]^2 = \left[\frac{k}{v_o}\right]^2 + 2\,k\,t,$$

y recordando que $k = v_o\,x_o$, despejamos $v(t)$,

$$v(t) = \frac{v_o}{\left[1 + \dfrac{2\,v_o\,t}{x_o}\right]^{1/2}}.$$

El gráfico velocidad versus tiempo indica que hemos resuelto un caso de un móvil con *aceleración variable*.

Capítulo V

CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES

V.1. VECTORES

V.1.1. Representación de Vectores en dos Dimensiones

Para describir el movimiento de una partícula en una dimensión espacial basta una coordenada, una línea recta. Si el movimiento ocurre en un plano, se requieren dos rectas. Si éstas son perpendiculares entre sí, hacen el procedimiento de ubicar una partícula, más fácil.

Por ejemplo, dadas estas dos rectas si queremos ubicar un punto **P** cualquiera, unimos el origen **O**, que es la intersección de las dos rectas con el punto **P** mediante una flecha, como se indica n la figura. A esta flecha le llamamos vector posición.

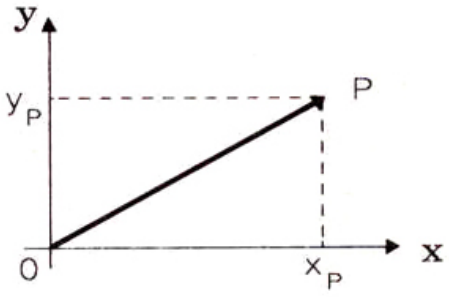


Figura V.1: *La flecha $\overrightarrow{OP}$ indica que el objeto se comporta como un vector. Las componentes de este vector, son las proyecciones del vector sobre el eje* **x**, *denominado* **abcisa** *y el eje* **y**, *la* **ordenada**. *Las coordenadas del punto* **P** *se escriben como un par ordenado de números reales, (x_P, y_P). El primer número, x_P, se obtiene trazando una paralela al eje* **y** *a través del punto* **P**.

.

Se requiere especificar la unidad de longitud a lo largo de cada una de las rectas (desde ahora ejes coordenados) y asignarles un sentido positivo para poder ubicar la partícula en cualquier

instante poder describir su movimiento en este plano. Usualmente, el punto con sus coordenadas respectivas se escribe como P(x,y).

En la Figura [V.1] se define cómo determinar las componentes del **par ordenado** (x,y). Por convención, el primer número corresponde a la **abcisa** (eje horizontal) y el segundo número a la **ordenada** (eje vertical).

Lo descrito hasta aquí es el método analítico para representar un vector. Dado un sistema de coordenadas podemos hablar del vector sin dibujarlo.

Una forma más intuitiva es la geométrica. Corresponde al dibujo del vector. Aquí la recta que une el origen O con el punto P, se denomina el **vector OP** y se escribe $\overrightarrow{OP}$, y contiene información acerca de la *dirección, sentido y magnitud del vector*.

La *dirección* es la recta que contiene los puntos O y P de la Figura, el *sentido* está determinado por la flecha que se instala en uno de los extremos del trazo y la *magnitud*, es el largo del trazo, que también se denomina el módulo del vector.

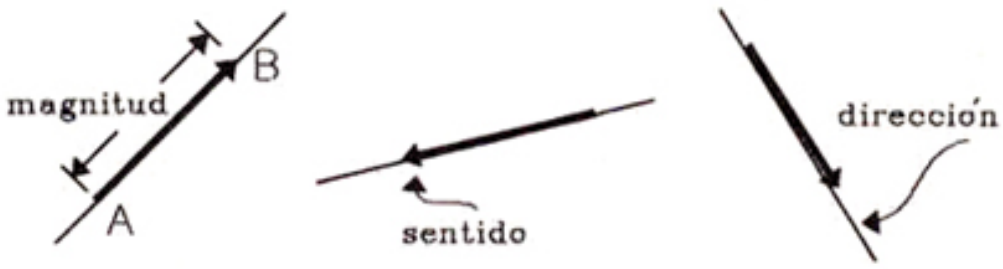


Figura V.2: *Representación gráfica de distintos vectores. En cada uno de ellos se indica una de las características de un vector: magnitud, dirección y sentido.*

Comenzaremos a operar con los vectores usando primero la forma analítica y posteriormente la geométrica.

V.2. ALGEBRA DE VECTORES

V.2.1. Definiciones Generales

La magnitud o módulo de un vector se indica mediante dos barras verticales a cada uno de los lados del vector: $|\overrightarrow{OP}|$. El módulo (o largo) del vector, es un número que se obtiene usando el teorema de Pitágoras. Para el caso en que nuestro vector nace en el origen de coordenadas, su magnitud es

$$| \overrightarrow{OP} | \equiv [x_P^2 + y_P^2]^{1/2}$$

La magnitud de un vector es *siempre* un número real positivo. Dadas las coordenadas de los dos puntos extremos de un vector: (x_A, y_A), (x_B, y_B), su valor se calcula de la siguiente forma:

$$| \overrightarrow{AB} | = \left[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\right]^{1/2}.$$

donde $(x_B - x_A)$ representa la sombra que proyecta el vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el eje–x.
Análogamente, $y_B - y_A$ es la proyección de este vector sobre el eje–y.

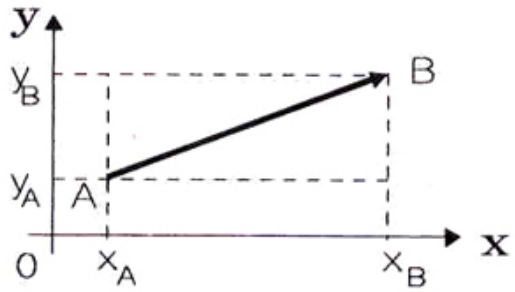


Figura V.3: *El origen de un vector no se ubica necesariamente en el origen del sistema de referencia. La Figura representa al vector $\overrightarrow{AB}$, indicando sus componentes que, como se señaló, corresponden a la diferencia entre la coordenada del punto final menos la coordenada de la cola de la flecha.*

Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{AB}$ de las Figuras (V.1) y (V.3), se pueden expresar mediante este método de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{OP} = [x_P - 0, y_P - 0] = [x_P, y_P], \qquad \overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A].$$

NO se puede intercambiar el orden de los números dentro de un casillero, por ejemplo, reemplazar x_B por x_A. Tampoco se puede cambiar las componentes desde un casillero al otro. Si realizamos cualquiera de estas operaciones estamos describiendo otro vector, no el propuesto originalmente. El orden de los números dentro de cada casillero y el de los casilleros mismos es parte de la información contenida en la descripción analítica. Esto es lo que se denomina un par ordenado de números.

Ejemplo

Demostramos que al cambiar el *orden* de los números x_A y x_B dentro del primer casillero, este nuevo par ordenado identifica otro vector, diferente del original: $\overrightarrow{AB}$.

El nuevo vector con su primera componente cambiada

$$\overrightarrow{A'B'} = [x_A - x_B, \quad y_B - y_A] = [(-x_B) - (-x_A), \quad y_B - y_A],$$

en la segunda igualdad se escribió, de acuerdo a la convención, la coordenada de la cabeza de la flecha menos la coordenada de la cola. Allí notamos que la componente x de la cola y de la flecha son *negativas*, es decir este vector es la reflexión especular del vector original $\overrightarrow{AB}$, como se indica en la Figura.□

El vector

$$\overrightarrow{BA} = [x_A - x_B, y_A - y_B],$$

donde se ha cambiado el orden de ambas coordenadas, tiene la misma magnitud y dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero *apunta en sentido opuesto.*

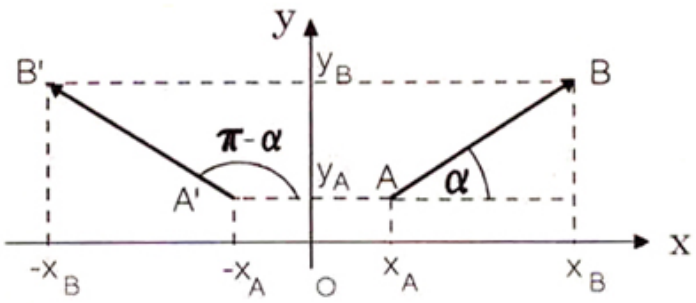


Figura V.4: *La Figura representa al vector A'B'y AB, indicando sus componentes. Se señala también el ángulo α que fija la dirección del vector.*

La razón entre la proyección sobre el eje OY y sobre el eje OX, es la tangente del ángulo que forma este vector con la abcisa (eje horizontal).

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \tag{V.1}$$

$$\tan(\pi - \alpha) \equiv \tan \alpha' = \frac{y'_B - y'_A}{x'_A - x'_B} = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\tan \alpha. \tag{V.2}$$

Ejercicio

Compruebe que estas dos últimas ecuaciones son equivalentes a la igualdad trigonométrica $\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha)$.□

Resumiendo: un vector se representa por un par ordenado de números. En el primer casillero se inserta la proyección del vector sobre el eje–x, y en el segundo, su proyección sobre el eje–y. Cada una de estas proyecciones se obtiene haciendo la diferencia entre la coordenada correspondiente a la cabeza de la flecha y la coordenada de la cola de la flecha.

V.2.2. Método Algebraico

En los casos anteriores usamos la identificación de un vector en dos dimensiones como un par ordenado de números.

A continuación estudiaremos el álgebra de estos vectores.

La suma de dos vectores es otro vector, cuya primera componente corresponde a la suma de los términos ubicados en el primer casillero y la segunda componente se obtiene sumando los números que aparecen en el segundo casillero de los vectores, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= [x_a, y_a], \quad \text{componentes del vector } \vec{A}, \\ \vec{B} &= [x_b, y_b], \quad \text{componentes del vector } \vec{B}, \\ \vec{A}+\vec{B} &\stackrel{\text{def}}{=} [x_a+x_b, y_a+y_b], \quad \text{suma de las componentes.} \end{aligned} \tag{V.3}$$

Producto de un escalar por un vector:

$$\lambda\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda x_a, \lambda y_a]. \tag{V.4}$$

Nota

Un *escalar* es un número real. Se le denomina de esa forma para diferenciarlo de un vector. Contiene menos información: sólo una magnitud, no existe ni dirección ni sentido. Por ejemplo la temperatura es un escalar, la presión, el volumen en un espacio de 3 dimensiones...

La resta de dos vectores se define como la resta de sus respectivas componentes.

$$\vec{A} - \vec{B} = [x_a - x_b, \;\; y_a - y_b] \tag{V.5}$$

En la representación analítica de los vectores, el número que se instala en el primer casillero, es la componente del vector en el eje x, (el largo del trazo que proyecta sobre el eje x). En el segundo casillero, el número representa el largo de la proyección del vector sobre el eje y.

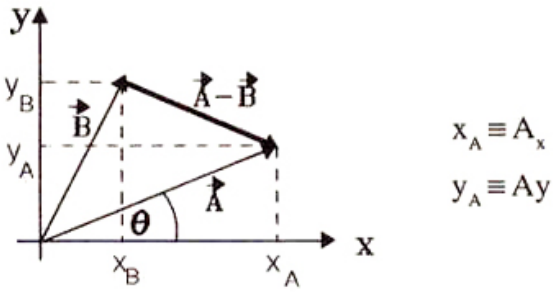


Figura V.5: *La representación de los vectores mediante un par ordenado contiene la misma información que la representación geométrica. Cada operación (suma, resta... de vectores) tiene su expresión en ambos métodos.*

Vectores unitarios

En física, además de la notación en componentes, se usan los *vectores unitarios*. La equivalencia entre los dos sistemas se define a continuación:

$$\vec{A} = [A_x, A_y] \stackrel{\text{def}}{=} A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}, \tag{V.6}$$

donde $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son vectores *unitarios*, es decir vectores cuya magnitud (largo) es la unidad (*magnitud = 1*) y apuntan en la dirección positiva del eje x y del eje y, respectivamente. El número que multiplica a $\hat{\imath}$ es la *componente–x* del vector y el número que acompaña a $\hat{\jmath}$ es la *componente–y* del vector.

Es una notación distinta para la misma representación analítica explicada anteriormente. Se usa con mucha frecuencia.

Resumen

Dos vectores son iguales si tienen las mismas componentes.

$$\vec{C} = [C_x, C_y], \quad \vec{B} = [B_x, B_y]$$

$$\text{Si } \vec{C} = \vec{B}, \Longrightarrow\ C_x = B_x,\ C_y = B_y.$$

$$\vec{A} \equiv [A_x, A_y] \equiv A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath},$$

$$|\vec{A}\,| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \text{largo del vector (módulo)},$$

$$A_x = |\vec{A}|cos\,\theta, \quad \text{componente en el eje } x,$$

$$A_y = |\vec{A}|sen\,\theta, \quad \text{componente en el eje } y,$$

$$\frac{A_y}{A_x} = \tan\,\theta,$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = [A_x, A_y] + [B_x, B_y]$$

$$\vec{C} = [A_x + B_x, A_y + B_y]$$

V.2.3. Método geométrico

Suma de vectores

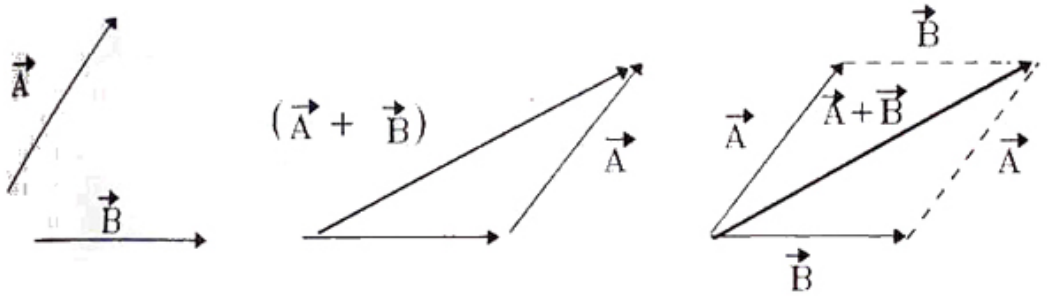


Figura V.6: *Para sumar vectores basta poner una de las flechas a continuación de la otra. El vector suma es la flecha que va desde el origen del primer vector elegido hasta el final del segundo vector. En la Figura, a la derecha, se incluye el método del paralelogramo para sumar dos fuerzas.*

Parece conveniente denominar los vectores con dos letras que indiquen su comienzo y fin, pero también es posible identificarlos mediante una sola letra, como lo hacemos a continuación.

Para sumar geométricamente los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, debemos poner la cola de $\vec{B}$ a continuación de la cabeza de $\vec{A}$, la flecha que parte de la cola de $\vec{A}$ y termina en la cabeza de $\vec{B}$, es el vector suma $(\overrightarrow{A + B})$.

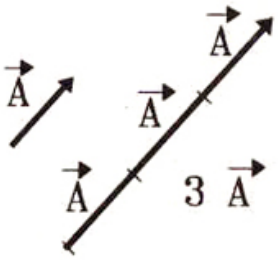
Otra alternativa para encontrar el vector que representa la suma de dos vectores consiste en construir un paralelogramo con los dos vectores dados en el orden que se incluye a continuación:
1.- Trasladamos paralelamente uno de los vectores, de modo que ambos tengan su origen (la cola de cada vector), en común (ver Figura [V.6]).
2.- Construimos un paralelógramo que tenga como lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
3.- La diagonal que parte del origen común es el vector $(\vec{A} + \vec{B})$.

A partir de este paralelógramo, se puede ver que $(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{B}+\vec{A})$, es decir, la suma de vectores es **conmutativa**, no varía al cambiar el orden de los sumandos.

Producto de un vector y un número real

Otra operación que necesitaremos es la multiplicación de un vector por un número real. Por ejemplo: $3 \cdot \vec{A} \equiv \vec{A}+\vec{A}+\vec{A}$.

En el caso general, cuando λ es un número real, positivo o negativo $\lambda\vec{A}$ es un vector que tiene la misma dirección de $\vec{A}$, pero su magnitud (largo) es $|\lambda|$ veces la magnitud del vector $\vec{A}$. Si $\lambda > 0$, se conserva el *sentido* que el vector tenía inicialmente. Si $\lambda < 0$ se invierte el sentido del vector.



Resta de dos vectores. Método geométrico

Este caso es equivalente a la *suma* de dos vectores, en la cual uno de ellos está multiplicado por $\lambda = -1$.

De acuerdo a la definición anterior $\vec{A}' \equiv (-1)\vec{A}$, y por lo tanto $\vec{B}+(-\vec{A}) = \vec{B}+\vec{A}'$. (Ver Figura).

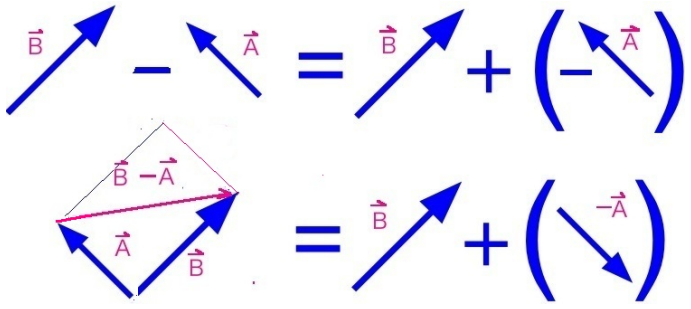


Figura V.7: *El vector $(\vec{B}-\vec{A})$, se obtiene dibujando ambos vectores a partir de sus colas. A continuación se traza la línea que comienza en la flecha del vector $\vec{A}$ y termina en la flecha del vector $\vec{B}$, como aparece en la figura.*

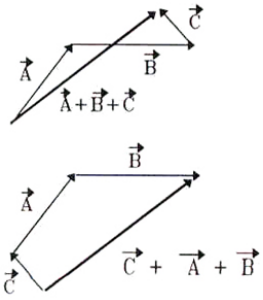
Suma de tres o más vectores

Para sumar más de dos vectores, se realiza la misma operación que para el caso de dos vectores: se toma un par de vectores cualquiera del grupo y se suman de acuerdo al método ya establecido;

con esta operación obtenemos un nuevo vector. A este vector se le suma –usando el mismo método– otro vector cualquiera de los restantes, generando un nuevo vector y así sucesivamente hasta incluir todos los vectores que debíamos sumar.

Se puede verificar de la Figura que el resultado de esta operación es *independiente del orden* con que se haya realizado la operación suma.

Esta propiedad de la suma de vectores se denomina ASOCIATIVIDAD. Indica que no importa como se asocien los vectores para sumarlos, el resultado final es el mismo. En la Figura se detallan los pasos a seguir para sumar tres vectores: se toma un vector *cualquiera* del conjunto, a continuación de éste, se copia cualquiera de los otros dos, poniendo la cola de éste último a continuación de la cabeza del anterior, y se repite la misma operación con el vector restante. Al terminar, se traza un vector que vaya del origen del primer vector a la cabeza del último sumado. La resultante es el vector suma de todos ellos.



La asociatividad en la suma de tres vectores se expresa a través del paréntesis que agrupa a un par de ellos. Este paréntesis establece un orden para comenzar sumando esos dos vectores. Al vector resultante se le suma a su vez el tercero. La asociatividad de la suma de vectores afirma que el resultado de la suma es independiente del par de vectores por el cual se comenzó.

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \;=\; (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

V.3. POSICION, VELOCIDAD Y ACELERACION.

V.3.1. Vector Posición

La posición de la partícula en cada instante está determinada por un vector que la señala. A medida que la partícula cambia de posición en el tiempo, el vector se desplaza con ella. La dependencia de $\vec{x}$ en el tiempo, se indica $\vec{x} \equiv \vec{x}(t)$.

V.3.2. Vector Velocidad

Se define como el desplazamiento dividido por el intervalo durante el cual ocurre dicho cambio,

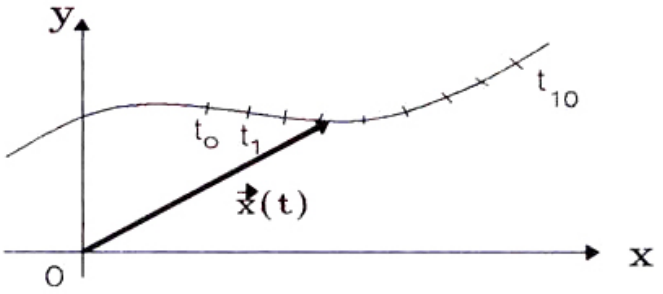


Figura V.8: *A cada punto de la trayectoria de la partícula le asociamos un número, que corresponde al tiempo que indica el reloj del viajero. También se puede usar la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria para identificar cada uno de sus puntos.*

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \tag{V.7}$$

escribiendo el vector en componentes,

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{[x(t_2), y(t_2)] - [x(t_1), y(t_1)]}{t_2 - t_1} \right\},$$

y ahora restando las componentes respectivas, de acuerdo a la forma de operar establecida en la Sección anterior,

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \ \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \tag{V.8}$$

Para encontrar el límite de una diferencia entre dos vectores en dos instantes de tiempo muy próximos entre sí , se debe calcular el límite de cada una de sus componentes en forma separada, como se ilustra a continuación.

$$\vec{v} \ \stackrel{\text{def.}}{=} \ [v_x, v_y], \tag{V.9}$$

$$v_x \ = \ \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \tag{V.10}$$

$$v_y \ = \ \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \tag{V.11}$$

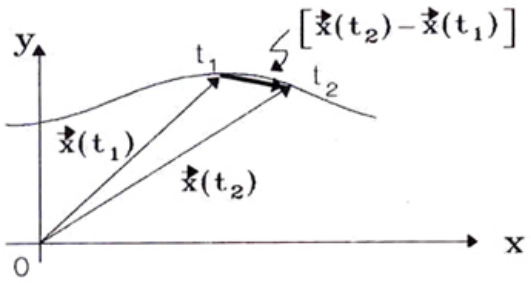


Figura V.9: *El vector velocidad es la flecha que une los puntos señalados por t_1 y t_2. En el límite en que estos dos puntos se acercan hasta converger tanto como se pueda sin poner uno encima del otro. La velocidad instantánea corresponde a la tangente a la curva en dicho punto.*

V.3.3. Vector Aceleración

Para calcular la *aceleración* se considera el cambio que experimenta cada una de las componentes del vector velocidad entre dos instantes muy próximos.

$$\vec{a} \stackrel{\text{def.}}{=} [a_x, a_y], \tag{V.12}$$

$$a_x = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \tag{V.13}$$

$$a_y = \lim_{t_2 \to t_1} \left\{ \frac{v_y(t_2) - v_y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \tag{V.14}$$

V.4. VELOCIDAD RELATIVA

Un ejemplo típico de un *movimiento relativo* ocurre cuando una persona camina sobre la cubierta de un barco. Su velocidad con respecto (*velocidad relativa*) al barco se puede determinar usando las definiciones dadas anteriormente, tomando como *sistema de referencia* adecuado la cubierta del barco. Ahora, para un observador ubicado en la orilla del río, la velocidad del pasajero, *relativa a la orilla*, es diferente, pues debe *sumar* a la velocidad del pasajero relativa al barco, la velocidad del barco mismo. La suma **vectorial** de estas velocidades es la velocidad del pasajero con respecto a la orilla.

Estamos tratando con un problema en el cual existen dos sistemas de referencia. La idea es relacionar ambos.

Conviene señalar tres aspectos

• Al definir el vector posición en la sección anterior, nos dimos un origen, un punto de referencia con respecto al cual medimos: el *sistema de referencia*. En el ejemplo del pasajero sobre la cubierta del barco barco, el sistema de referencia es la cubierta misma. Otro ejemplo más simple ocurre cuando caminamos por una escalera mecánica en el metro o sobre una de esas correas largas en los aeropuertos.

• Cuando nos referimos a la velocidad debemos especificar el sistema de referencia con respecto al cual medimos la velocidad. En el ejemplo anterior, los dos sistemas de referencia son: el barco y la orilla (o tierra firme).

• La velocidad del pasajero con respecto a la orilla es la suma vectorial de la velocidad del barco con respecto a la orilla más la velocidad del pasajero con respecto a la cubierta del barco. Este es el Principio de Superposición propuesto por Galileo Galilei. La experiencia cotidiana lo confirma.

Esta es una *suposición*, cuya validez la decide la evidencia experimental. En la actualidad sabemos que es una *excelente aproximación* para los casos en los cuales las velocidades relativas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Esto es lo que ocurre en la vida diaria.

La teoría de la relatividad especial de Albert Einstein establece otra expresión para la suma de velocidades. Ambas expresiones coinciden para el caso de velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, 300.000 km/s.

Este último comentario destaca la importancia de juzgar en forma crítica las suposiciones que se utilizan al construir una teoría y la necesidad de su verificación experimental, en diversas circunstancias, para determinar su rango de validez.

Ejemplo

La corriente de un canal tiene una velocidad de 10 km/h en dirección Este. Un transbordador navega en una dirección de 30° Nor–oeste con una velocidad de 20 km/hora *con respecto* a la corriente del canal. ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según un observador situado en la ribera?

En este esquema, el transbordador está representado por el punto **P** que representa al transbordador. Hemos supuesto que el punto O'se mueve **junto** con la corriente del canal. A ésta le hemos asociado un sistema de referencia (x, y) *imaginario* que, por supuesto, se mueve junto con la corriente, siempre con el eje O'X, paralelo a la orilla del canal y el eje O'Y, perpendicular a la ribera. La posición del transbordador con respecto al observador parado en la ribera, al cual identificamos con el punto O, está dada, en cualquier instante, por el vector:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \tag{V.15}$$

$\overrightarrow{OP}$: posición del transbordador con respecto al observador en la orilla.

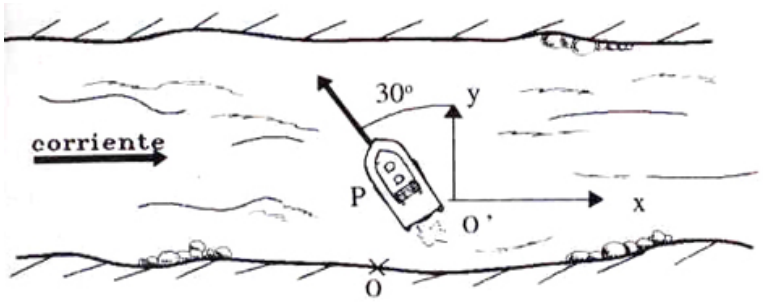


Figura V.10: *Con este problema aparecen las velocidades relativas. La Figura describe la situación del transbordador en el río y las distintas velocidades relevantes para este ejercicio.*

$\overrightarrow{OO'}$: posición del punto O'que se desplaza junto con la corriente del canal, tal como lo ve el observador O en la orilla.

$\overrightarrow{O'P}$: desplazamiento del transbordador con respecto al sistema de coordenadas fijo a la corriente del canal: $(O'X, O'Y)$.

Los tres vectores mencionados cambian de dirección y magnitud en el tiempo.

$\overrightarrow{OO'}$: cambia porque la corriente se desplaza con respecto a la orilla.

$\overrightarrow{O'P}$: cambia solamente de *magnitud*, si hemos elegido el punto O' en forma adecuada. En este caso, el transbordador se desplaza con respecto a la corriente del canal pero su *dirección permanece constante*, como lo afirma el enunciado. Podemos imaginar una balsa llevada río abajo arrastrada por la corriente. Un observador parado en esa balsa observa que el barco se aleja siempre en la dirección indicada en el enunciado.

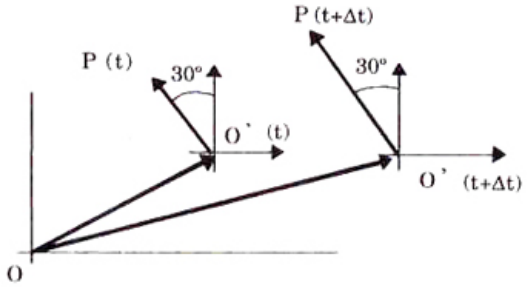


Figura V.11: *Los vectores posición definidos en el problema cambian en el tiempo. La diferencia entre dos posiciones consecutivas divida por el tiempo define la velocidad de cada uno de los puntos especificados.*

Ya hemos visto cómo se define velocidad en dos dimensiones. Apliquemos esa definición aquí. Comencemos descomponiendo el vector $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P},$$

enseguida calculamos la velocidad del transbordador con respecto a la orilla:

$$\vec{v}_{\text{transb/ orilla}} = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\overrightarrow{OP}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{OP}\,(t)}{\Delta t}\right\}, \tag{V.16}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{transb/ orilla}} &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\overrightarrow{OO'}\,(t'+\Delta\, t') - \overrightarrow{OO'}\,(t')}{\Delta t'}\right) + \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\overrightarrow{O'P}\,(t+\Delta t) - \overrightarrow{O'P}\,(t)}{\Delta t}\right).\end{aligned} \tag{V.17}$$

En el último paso hemos usado la siguiente propiedad: el límite de una suma es igual a la suma del límite de los sumandos.

También hemos usado t' en lugar de t al derivar el vector $\overrightarrow{OO'}$ para indicar que estamos derivando con respecto al tiempo medido por un observador en el transbordador. Galileo supuso que el tiempo transcurre igualmente en cualquiera de los dos sistemas, O y O', y de esta forma es posible reemplazar t' por t, el tiempo medido por un observador en reposo en la orilla del canal. Como ya señalamos, esta suposición es una excelente aproximación cuando las velocidades relativas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

$$\vec{v}_{transb/orilla} = \vec{v}_{transb/corriente} + \vec{v}_{corriente/orilla} \tag{V.18}$$

Esta regla de composición es fácil de memorizar: es idéntica a la multiplicación de una fracción por la unidad: $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}$.

$$\frac{\text{transb}}{\text{orilla}} = \frac{\text{transb}}{\text{corriente}} + \frac{\text{corriente}}{\text{orilla}}.$$

Volviendo al ejemplo, reemplazamos en la regla de composición de velocidades los datos del problema y usando la notación de los vectores unitarios, introducida anteriormente tenemos:

$$\vec{v}_{transb/orilla} = (v_t \cos 30^\circ \hat{j} - v_t sen\, 30^\circ \hat{i}) + v_{o'}\hat{i} \tag{V.19}$$

Recordemos que $\hat{i} \equiv$ representa un vector unitario en la dirección positiva del eje O'X, tiene magnitud 1 ($\equiv$ largo unitario) y $\hat{j} \equiv$ es su equivalente en la dirección O'Y.

Como al sumar vectores se suman las componentes respectivas tenemos que:

$$\vec{v}_{\text{transb / orilla}} = [v_{o'} - v_t \text{sen}\, 30^\circ]\hat{\imath} + v_t cos\, 30^\circ \hat{\jmath}.$$

Resumen

Para desprendernos de la notación usada en el último ejercicio y generalizar estos resultados, supongamos que un objeto A se mueve con respecto a un sistema de referencia que designamos como O', y éste a su vez se mueve con respecto a otro sistema de referencia O.

El vector de posición de A con respecto a O es $\vec{x}_{A/O}$, y referido al sistema O' es:

$$\vec{x}_{A/O} = \vec{x}_{A/O'} + \vec{x}_{O'/O}. \tag{V.20}$$

Derivando esta ecuación con respecto a t, obtenemos la ley de velocidades relativas:

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O'} + \vec{v}_{O'/O}. \tag{V.21}$$

A su vez derivando esta ecuación con respecto al tiempo encontramos la ley de composición de las aceleraciones:

$$\vec{a}_{A/O} = \vec{a}_{A/O'} + \vec{a}_{O'/O}. \tag{V.22}$$

Esta última deducción de la ley de composición de velocidades, es general. Demuestra que mantiene su forma aún en la presencia de aceleraciones relativas entre los distintos sistemas de referencia.

V.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Usaremos el ejemplo del transbordador analizado en la sección anterior para ilustrar el Principio de Superposición.

Supongamos que nos damos un intervalo arbitrario, por ejemplo una hora (por ser más útil) y en este intervalo realizamos un experimento pensado: imaginamos que la corriente del canal se detiene y calculamos el desplazamiento del barco sujeto a esa condición. En esa situación, el barco se desplaza 20 km, desde O'hasta el punto Pén el transcurso de la hora.

Enseguida –y siempre en nuestra imaginación– dejamos fluir la corriente del canal pero ahora suponemos que el barco no se propulsa, simplemente flota arrastrado por dicha corriente. En este caso, el desplazamiento debido al arrastre del canal, actuando también durante una hora, lleva al barco desde el punto P'hasta P (10 km hacia la derecha), como mostramos en la Figura.

El *desplazamiento total* durante esa hora es la superposición de ambos desplazamientos: el vector de O hasta P. Además, como el desplazamiento ocurrió en una hora, este vector representa también la velocidad del barco con respecto al observador ubicado en la orilla, medida en km/h.

Lo que hicimos fue *SUPERPONER* dos desplazamientos en un mismo intervalo Δt. Primero el desplazamiento que ocurre al congelar una de las velocidades y desplazar el objeto obedeciendo

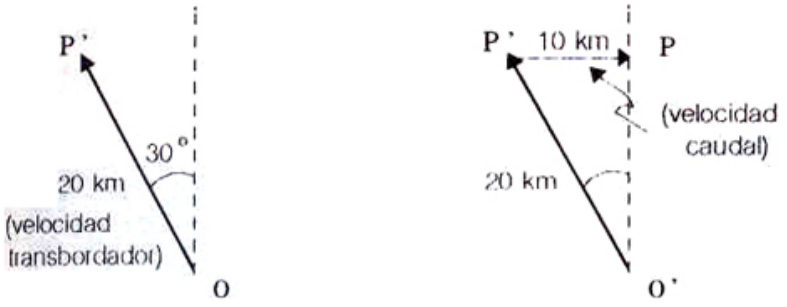


Figura V.12: *Superposición de los movimientos del caudal y del barco. Hemos supuesto que el movimiento en una de las direcciones no afecta en absoluto al movimiento que se realiza simultáneamente en la dirección perpendicular.*

sólo a la restante y después, congelar la velocidad activa en el primer paso y dejar actúar la segunda velocidad. Hemos supuesto que el resultado de esta operación, que sólo se puede realizar en la imaginación, arroja los mismos resultados que en la realidad donde ambos movimientos ocurren simultáneamente. Esta es, sin duda una suposición que confirma la experiencia (es decir, que da resultados semejantes a los que se obtienen haciendo el experimento correspondiente). Denominamos esta hipótesis, el **PRINCIPIO DE SUPERPOSICION**.

En forma algebraica este principio se materializa en la ley de composición de velocidades escrita anteriormente:

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O'} + \vec{v}_{O'/O},$$

el primer término indica lo que sucede en el sistema O', y el segundo lo que ocurre en el sistema O, y el resultado final es la suma (superposición) de ambos.

Otra forma –equivalente a la anterior– de establecer este principio es la siguiente:

En resumen: el Principio de Superposición afirma que el movimiento en la dirección $\hat{\imath}$ no altera las leyes que rigen el movimiento en la dirección $\hat{\jmath}$, y viceversa. Por lo tanto ambos movimientos pueden ser analizados en forma separada.

Enunciado de esta manera, el principio de superposición tiene aplicación inmediata en la resolución de problemas en dos (o más) dimensiones.

V.5.1. Movimiento Parabólico

En los tiempos de Galileo, la idea que un movimiento arbitrario se pudiera estudiar como la *superposición* de dos movimientos independientes, que no se influencian entre sí era absolutamente nueva y de hecho todo un descubrimiento. Para ilustrarlo, reproducimos brevemente un párrafo de su libro *Dos Nuevas Ciencias*:

Supongamos una partícula que se desplaza con velocidad uniforme sobre la superficie de un plano hasta que llega al extremo, donde al abandonar dicho punto, adquiere **además** *de su movimiento previo, una inclinación a caer hacia el centro de la tierra, debido a su propio peso; de forma que el* **movimiento resultante** *...***está compuesto** *por un desplazamiento, el cual es uniforme y horizontal y el otro vertical y naturalmente acelerado*

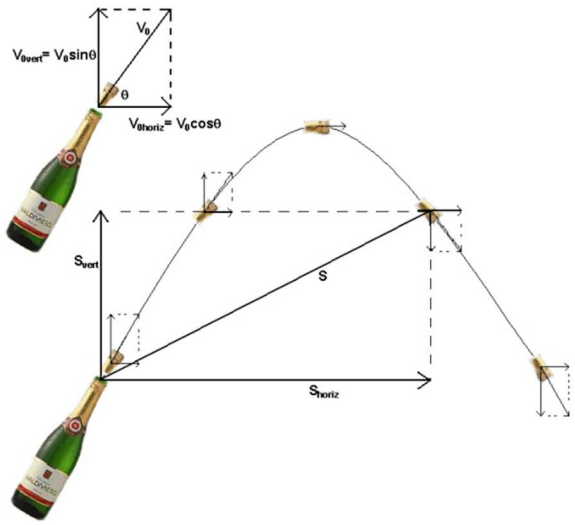


Figura V.13: *Trayectoria de un objeto en el campo gravitacional de la tierra. La componente horizontal de la velocidad permanece constante durante todo el trayecto. La componente vertical evoluciona igual que en el movimiento vertical puro. El Principio de Superposición establece la independencia de los dos movimientos.*

Con las palabras *movimiento resultante* y *está compuesto*, Galileo estableció su *Hipótesis* de trabajo. En su opinión, la validez de esta hipótesis se basaba en su *simplicidad* y en el hecho que sus predicciones *concordaban con las observado en la vida diaria*.

En el ejercicio anterior la hemos usado al afirmar que el movimiento del barco es la suma de sus dos desplazamientos y que éstos no interfieren entre sí .

La Figura [V.14] muestra una pelota en caída libre. La foto permite calcular el camino recorrido entre cada destello puesto que éstos ocurren a intervalos iguales.

En la misma Figura se incluye una foto que compara la caída libre de un cuerpo con el movimiento parabólico que describe una partícula que tiene inicialmente una velocidad horizontal.

Antes de Galileo, los filósofos habían dedicado mucho tiempo intentando explicar el *origen* de este movimiento. Galileo centró su interés en su *descripción*. Para ello elaboró un argumento sencillo y directo.

El movimiento parabólico cuya secuencia aparece en la fotografía, Galileo lo analizó como una superposición de dos componentes: una era la tendencia *natural* de los cuerpos a mantener su velocidad (Ley de Inercia) y por lo tanto el cuerpo mantenía su desplazamiento horizontal después de abandonar el borde de la mesa y la otra componente era la caída libre. Ambos movimientos

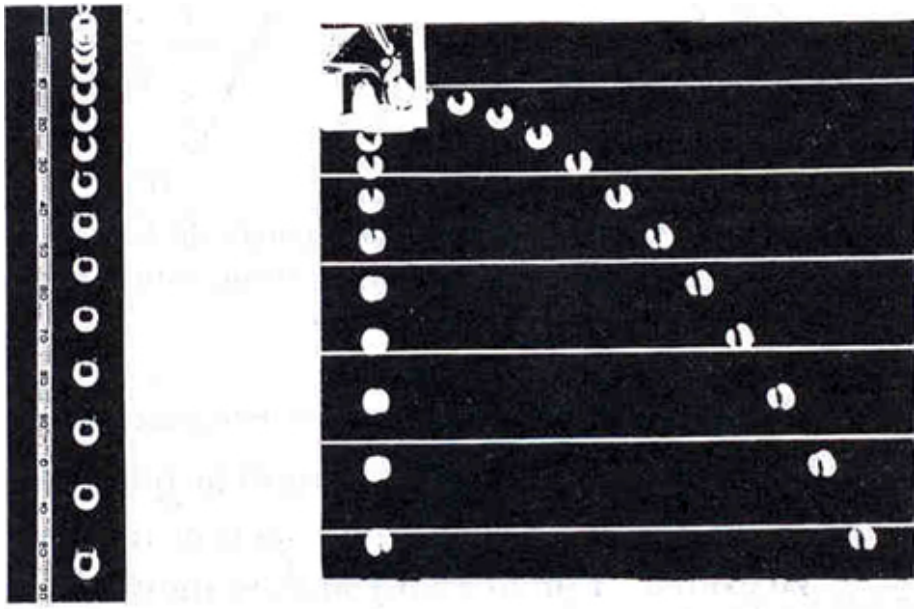


Figura V.14: *A la izquierda se superponen las fotografías de la caída libre de un cuerpo. A la derecha se muestra el caso de un movimiento parabólico, considerado como la superposición de dos movimientos independientes: uno horizontal con velocidad constante y la caída libre.*

se *superponen* simultáneamente y dan origen al *movimiento parabólico* (la curva que describe la pelota es una parábola). Galileo fue el primero en descomponer de esta forma la trayectoria de un cuerpo en caída libre en dos dimensiones.

Para estudiar este movimiento debemos comenzar especificando el sistema de referencia con respecto al cual referimos los vectores posición, velocidad y aceleración usados en la cinemática de dos dimensiones.

Sabemos que éste se puede descomponer en la superposición de dos movimientos independientes, en consecuencia las fórmulas que debemos usar en *cada una de las direcciones* corresponden a las ya conocidas para el movimiento acelerado en una dimensión. A continuación las escribimos explícitamente.

COMPONENTE–X:

$$x(t) = x_0 + (v_0)_x \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{V.23}$$

$$v_x(t) = (v_0)_x + a_x \cdot t \tag{V.24}$$

$$v_x^2 - (v_0)_x^2 = 2a_x \cdot (x - x_0) \tag{V.25}$$

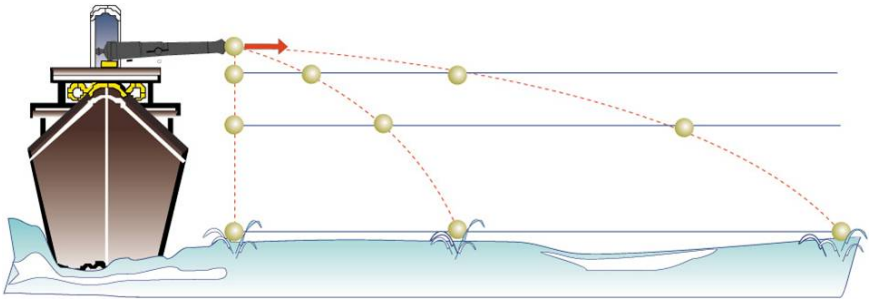


Figura V.15: *Trayectorias de tres balas lanzadas horizontalmente desde el cañón del barco. Todas tocan el agua simultáneamente. El movimiento vertical para cada una de ellas es el mismo. Sólo se distinguen por la distancia horizontal recorrida: es proporcional a la componente horizontal de la velocidad incial de cada una de ellas.*

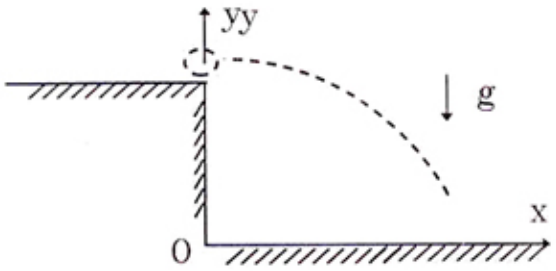


Figura V.16: *Definimos el instante inicial cuando la partícula se encuentra justo al borde del precipicio y con una velocidad que apunta en la dirección positiva del eje* **x**. *El origen de coordenadas se ubica en O.*

COMPONENTE–Y:

$$y(t) = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \tag{V.26}$$

$$v_y(t) = (v_0)_y + a_y \cdot t \tag{V.27}$$

$$v_y^2 - (v_0)_y^2 = 2a_y(y - y_0) \tag{V.28}$$

En el caso de una partícula cayendo por el borde de una mesa, como se indica en la Figura, estas cantidades toman los siguientes valores:

$$\vec{v}_0 = [v_0, 0], \quad \vec{x}_0 = [0, h], \quad \vec{a} = [-g, 0].$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0\, t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned}\right\} \text{Componente–X}$$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= h - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v_y(t) &= -g \cdot t \\ v_y^2 &= -2\, g \cdot (y - h) \end{aligned}\right\} \text{Componente–Y}$$

Con estas ecuaciones escritas, ya estamos preparados para resolver un problema. Inventemos un enunciado que combine con la Figura hecha anteriormente:

Ejemplo

Un bombardero vuela con una velocidad horizontal v_0, constante, y a una altura h dirigiéndose directamente hacia su objetivo.

¿A qué distancia L el piloto debe *soltar* la bomba, para alcanzar el blanco asignado? Exprese su respuesta en función del ángulo ϕ.

Nota:

Al decir que *suelta* la bomba, estamos aclarando que, en el instante que se deja libre, la bomba tiene la *misma* velocidad que el bombardero .

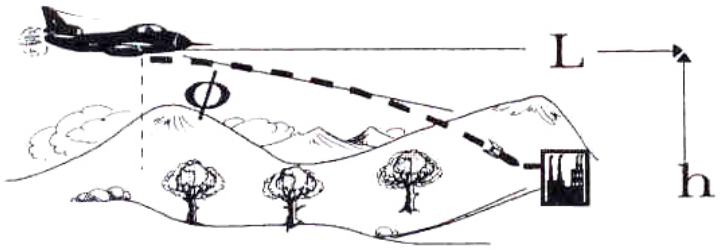


Figura V.17: *Para esta situación se desea encontrar el valor del ángulo que debe medir el artillero para saber cuando accionar el misil. Este es, conceptualmente, el mismo problema que aquel de una partícula cayendo del borde de una mesa con una velocidad inicial.*

Queremos saber en qué momento el piloto debe accionar el mecanismo para que la bomba, considerada como una partícula puntual sin fricción, comience su caída parabólica y dé en el objetivo.

Cabe notar que el considerar la bomba como una partícula es una mala aproximación. En realidad, deberíamos considerar la viscosidad del aire y la presencia de las aletas que permiten planear

al misil, para calcular correctamente el punto donde tocará tierra. Esta es una primera aproximación, la más simple, a este problema típico.

La Figura correspondiente a este problema es, salvo detalles, igual a la anterior, donde se examinó la caída de un objeto puntual desde el borde de una mesa. El problema es el mismo y, en consecuencia, las ecuaciones son las mismas.

Nos interesa conocer el ángulo ϕ, tal que $\tan\,\phi = \dfrac{L}{h}$

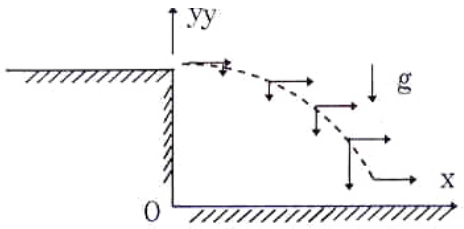


Figura V.18: *La bomba sigue una trayectoria parabólica, tal como el movimiento de caída libre de un objeto puntual. Esta es una primera aproximación.*

De la componente horizontal **x** , tenemos:

$$\begin{aligned} x = &\quad v_0\, t \\ &\Downarrow \\ L = &\quad v_0\, T. \end{aligned}$$

Pero, en el mismo instante T, la bomba, de acuerdo al sistema de referencia elegido, alcanza $y = 0$, entonces:

$$0 = h - \frac{1}{2}\, g\, T^2.$$

De aquí , obtenemos:

$$T = \left\{ \left[\frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Examinando las dimensiones, vemos que **T** tiene las dimensiones correctas

$$T = \left\{ [L] \frac{[T^2]}{[L]} \right\}^{\frac{1}{2}} = [T]$$

Como h y g son datos, T es conocido. Reemplazando en L:

$$L \;=\; v_0 \left[\frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\,\phi \;=\; \frac{L}{h} = \left[\frac{2v_0^2}{gh} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Analicemos ahora las dimensiones:

$$[v_0^2] = \left[\frac{L^2}{T^2}\right] \qquad [g \cdot h] = \left[\frac{L}{T^2} \cdot L\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2\, v_0^2}{g\, h}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{no tiene dimensiones,}$$

como corresponde, puesto que $\tan\, \phi$ es adimensional.

Al trabajar en dos dimensiones, no se necesita memorizar más fórmulas que las ya conocidas en una dimensión. Lo que se debe hacer es escribir las mismas fórmulas anteriores en forma *vectorial*:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 \tag{V.29}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \tag{V.30}$$

$$\Longrightarrow \qquad v^2 - v_0^2 = 2a_x\,(x - x_o) + 2a_y\,(y - y_o) \tag{V.31}$$

$$\vec{x} = [x(t), y(t)], \tag{V.32}$$
posición de la partícula en el instante t,

$$\vec{x}_0 = [x(0), y(0)], \tag{V.33}$$
posición inicial de la partícula,

$$\vec{v}_0 = [(v_0)_x, (v_0)_y], \tag{V.34}$$
velocidad de la partícula en el instante inicial,

$$\vec{v} = [v_x(t), v_y(t)], \tag{V.35}$$
velocidad de la partícula en el instante t,

$$\vec{a} = [a_x, a_y], \tag{V.36}$$
componentes de la aceleración *constante*.

Ejemplo

Considere dos cañones idénticos: 1 y 2, que se apuntan mutuamente, como aparece en la Figura. Si ambos disparan simultáneamente sus balas con velocidades $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, demuestre que las balas

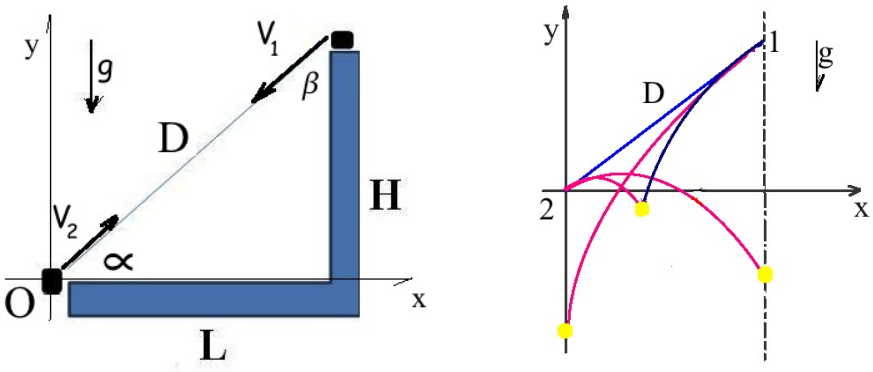


Figura V.19: *A la derecha se esbozan tres casos de choques de las balas. Uno en el cual la velocidad inicial de 2 es nula, otro en el cual la velocidad inicial de 1 es nula y un tercero donde ambas tienen velocidades iniciales no nulas.*

bajo estas condiciones iniciales, **siempre chocan** en el aire.

Solución

Utilizaremos el **Principio de Superposición**. Por ser un triángulo rectángulo se cumple que

$$\cos\alpha = \frac{L}{D} = sen\beta, \quad sen\alpha = \frac{H}{D} = \cos\beta. \tag{V.37}$$

Esta igualdad geométrica es muy relevante en los cálculos posteriores.

Movimiento en el Eje Horizontal

El movimiento en el eje-x está determinado por la proyección de la velocidad de cada una de las balas en el eje **x**. El movimiento horizontal es -obviamente- uniforme, no hay aceleración.
Tomamos un sistema de referencia en el punto de lanzamiento de la partícula de la izquierda, que le asignamos el subíndice 2. Designamos las coordenadas de cada bala como $\mathbf{x}_1\mathbf{(t)}$ la del vértice superior y $\mathbf{x}_2\mathbf{(t)}$ asociada al cañón en el origen de coordenadas.

Las coordenadas de las partículas 1 y 2, son

$$x_1 = L - (V_{1\,o}\, sen\beta)\, t, \quad x_2 = (V_{2\,o}\, \cos\alpha)\, t.$$

Si dejamos esta expresión sólo en función del ángulo α utilizando la igualdad [V.5.1], tenemos

$$x_1 = L - (V_{1\,o}\cos\alpha)\, t, \quad x_2 = (V_{2\,o}\cos\alpha)\, t.$$

En el punto de encuentro se cumple: $x_1 = x_2, y \qquad t \equiv \bar{t}$, de modo que

$$L - (V_{1\,0}\cos\alpha)\ \bar{t}\ =\ (V_{2\,o}\ \cos\alpha)\ \bar{t}\ ,\Rightarrow\ \bar{t}\ =\ \frac{L}{[V_{1\,o}\ +\ V_{2\,o}]\cos\alpha}. \tag{V.38}$$

Movimiento en el Eje Vertical.

Las componentes de la velocidad para cada uno de las balas es $V_{1\,y}$ = - $V_{1\,o}\cos\beta$ y $V_{2\,y}\ = +V_{2\,o}\,sen\alpha$. Usando la equivalencia trigonométrica de [V.5.1], la velocidad de la partícula 1 se puede expresar como $V_{1\,y}$ = - $V_{1\,o}sen\alpha$.

De acuerdo a los datos de la Figura,

$$y_1\ =\ H\ -\ (V_{1\,o}sen\alpha)\,t\ -\ \frac{1}{2}\,g\,t^2, \qquad y_2 = 0 + V_{2\,o}\,(sen\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2.$$

En el punto de encuentro (componente vertical) se debe cumplir que y_1 = y_2 y debe ocurrir al mismo tiempo, que lo definimos como t = t^*.

La primera condición es

$$H - (V_{1\,o}\,sen\alpha)\,t^*\ -\ \frac{1}{2}g\,t^{*2}\ =\ (V_{1\,o}\,sen\alpha)\,t^* - \frac{1}{2}\,g\,t^{*2},\ \Longrightarrow\ t^*\ =\ \frac{H}{[V_{1\,o}\ +\ V_{2\,o}]\,sen\alpha} \tag{V.39}$$

Para que ocurra el choque, los tiempos de encuentro horizontal y vertical deben coincidir: $t^*\ = bart$. Para que ello ocurra debe cumplirse que

$$\frac{L}{\cos\alpha}\ =\ \frac{H}{sen\alpha}\ \Longrightarrow\ \tan\alpha\ =\ \frac{H}{L}.$$

Una mirada a la Figura (V.19) confirma que esta relación es correcta.
Por tanto, las dos balas siempre chocan bajo las condiciones establecidas en este problema.

Podemos encontrar a qué distancia horizontal de la posición inicial se produce el choque:

$$x_2\ =\ (V_{2\,o}\ \cos\alpha)\,\bar{t}\ =\ (V_{2\,o}\ \cos\alpha)\ \frac{L}{[V_{1\,o}\ +\ V_{2\,o}]\cos\alpha}\ =\ \frac{V_{2\,o}}{[V_{1\,o}\ +\ V_{2\,o}]}\,L. \tag{V.40}$$

□

Ejercicio

Relacione este problema con el problema del mono (Ver Figura V.37). ¿Puede afirmar que están relacionados? ¿Si resuelve este problema, recupera la solución del mono como un caso particular? ¿Qué ocurre con los resultados obtenidos si Ud. inserta $V_{1o} = 0$?

Ejercicio Desafío

Considere la siguiente situación relacionada con el problema anterior. Suponga que se da como dato la razón entre las velocidades de cada uno de los proyectiles: $\mathbf{z} \equiv V_{1o}/V_{2o}$. Dadas las misma condiciones anteriores del ejemplo, encuentre el Lugar Geométrico de los puntos donde chocan las balas, utilizando la razón **z** como parámetro. Por ejemplo: Ud. se da un valor de **z** y encuentra las coordenadas $\mathbf{X}_P$(z) e $\mathbf{Y}_P$(z) del punto de choque en función de **z**. Si despeja de estas ecuaciones **z**, encuentra una ecuación entre **X** e **Y**. esta es la ecuación del Lugar Geométrico buscado.

Note que existen al menos tres puntos de referencia. A saber: $\mathbf{V}_{2o} = 0$, tenemos x = 0; $\mathbf{V}_{1o} = 0$, x = L, y si los módulos de ambas velocidades son iguales x = L/2.

NOTA: Conviene usar variables adimensionales como $\bar{y} = y/H$ y $\bar{x} = x/L$.

Usando los tiempos de choque $\bar{t}$ y t^*, los reemplaza en la expresión para la coordenada x e y, con esto obtiene las coordenadas del choque en función de z (en realidad de [1+z]). Usando (1+z) puede escribir la coordenada y (o $\bar{y}$ en función de x (o $\bar{x}$).

Ejemplo

En el problema de la figura, V.20, se pide calcular la máxima distancia Δ que un objeto puede alejarse del borde del precipicio para evitar ser alcanzado por los objetos lanzados desde el punto A. La velocidad de lanzamiento es v_0 y la distancia de A hasta el borde del precipicio es L y h su altura.

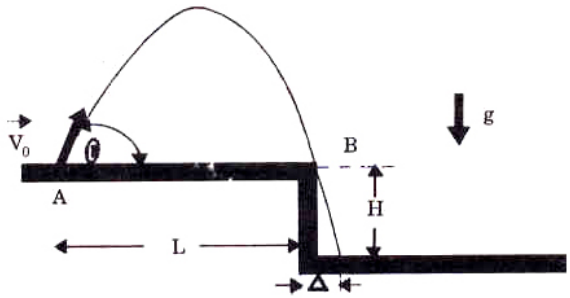


Figura V.20: *En este problema debemos imponer la condición que la partícula cruce (o apenas toque) el borde del precipicio. De las dos soluciones que existen, una sola de ellas corresponde al máximo de* Δ.

Datos

$V_0 = |\vec{V}_0|$, g, L y H conocidas.

$\theta = ?$

Debemos calcular θ de forma que el proyectil se aproxime lo más posible al punto B.

Método

i) Calculamos θ de forma que el proyectil pase justo por B (puesto que necesitamos conocer el valor mínimo de Δ)

ii) Una vez conocido θ, calculamos Δ.

En el primer punto, es relativamente simple adelantar la relación que existirá entre las variables conocidas del problema L y v_0, usando análisis dimensional.

$$[L] = \left[\frac{v_0^2}{g}\right].$$

$\Rightarrow L \propto \dfrac{v_0^2}{g}$, sospechamos que para reemplazar el signo *proporcional* por una igualdad se debe incluir el otro parámetro que afecta la respuesta: el ángulo θ, ya que $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta$, ... son adimensionales.

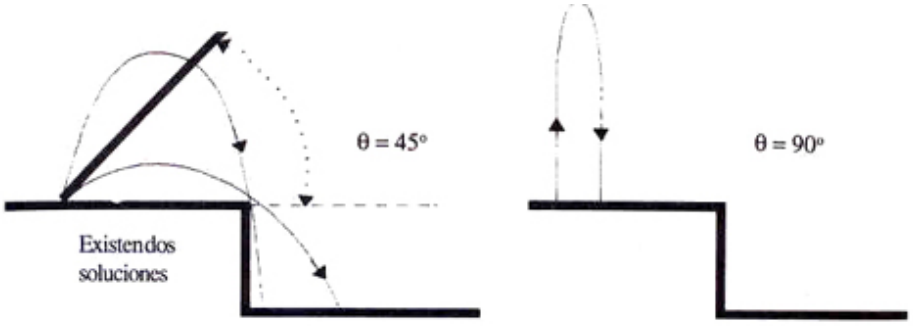


Figura V.21: *La Figura indica las distintas posibilidades que pueden ocurrir dependiendo del valor del ángulo de lanzamiento. No aparece $\theta = 0$, que equivale a enviar la bomba rodando por el piso...*

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{Componente} \quad x: \quad x &= (v_0 \cos\theta)t \\
\text{Componente} \quad y: \quad y &= (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\
v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta - g\,t \\
v_y^2 - v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta &= -g(y-o)
\end{aligned}$$

Por el principio de superposición al tocar B en el instante $t = T$, se debe cumplir que:

$$v_y(T) = -(v_0 \,\text{sen}\,\theta).$$

Repase el ejemplo de la caída libre de un objeto.

En ese mismo instante $x(T) = L = T \cdot v_0 \,\cos\,\theta$ y usando la ecuación para la velocidad:

$$v_y(T) = -v_0 \,\text{sen}\,\theta = v_0 \,\text{sen}\,\theta - g\,T$$

$$2\,v_0 \,\text{sen}\,\theta = g\,T = \frac{g\,L}{v_0 \,\cos\,\theta}$$

De forma que:

$$(*) \qquad \text{sen}\,2\theta = \frac{g\,L}{v_0^2}, \qquad\qquad L = \frac{v_0^2 \,\text{sen}\,2\,\theta}{g}.$$

Conviene examinar mejor la fórmula $(*)$. Al graficar la función sen α vs. α vemos que sen α toma su valor máximo en $\alpha = \pi/2$ de modo que si g y v_0 permanecen inalterados y nos permitimos cambiar θ, el máximo alcance se produce cuando $2\theta = \pi/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$.

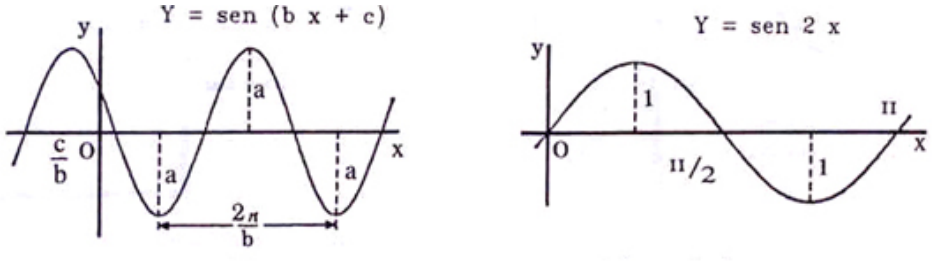


Figura V.22: *Gráfico del seno del ángulo doble. Esta Figura indica que el ángulo de mayor alcance corresponde a 45 grados. En ese caso b= 2, c = 0 y a= 1.*

Resumiendo: dado g, L y v_0^2, usando la ecuación $(*)$ podemos determinar el ángulo θ de lanzamiento.

Ahora comenzamos la segunda etapa: el cálculo de Δ

Notemos que : $L + \Delta = x$, en el instante τ. Pero $y(\tau) = -H$, puesto que durante la trayectoria no cambia el valor de la aceleración,

$$L \,+\, \Delta \,=\, v_{ox} \cdot \tau, \quad -H \,=\, v_{oy}\,\tau \,-\, \frac{1}{2}\,g\,\tau^2. \tag{V.41}$$

Hemos escrito dos ecuaciones independientes y contienen dos incógnitas: Δ, τ. Despejando estas dos incógnitas, obtenemos:

$$\tau^2 - \left(2\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right)\tau - \frac{2\,H}{g} = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \pm \left(\frac{4\,v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} + \frac{8\,H}{g}\right)^{1/2}\right],$$

$$\tau = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\,H\,g}{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}}\,\right]$$

$$\Delta = \tau\, v_{0\,x} - L$$

$$\Delta = \frac{L}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\,H\,g}{\dfrac{g\,L \operatorname{sen}\theta}{2\,\cos\,\theta}}}\,\right] - L$$

$$\Delta = \frac{L}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4\,H}{L\,\tan\,\theta}} - 1\right]. \quad \square$$

Esta es la distancia máxima que podemos alejarnos de la base del precipicio. La cantidad entre corchetes en la fórmula anterior no tiene dimensiones.

Otra forma de obtener el mismo resultado

$$L + \Delta = v_{ox} \cdot \tau, \qquad \text{(eje x)}$$

$$-2g(-H - o) = v_{f\,y}^2 - [v_0 \operatorname{sen}\theta]^2. \qquad \text{(eje y)}$$

De esta última ecuación obtenemos el tiempo τ que tarda en llegar al fondo del precipicio.

$$v_f|_y = -[(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\,g\,H]^{1/2}.$$

El signo menos proviene del hecho que la raíz cuadrada tiene ambas posibilidades como resultado y el signo de $v_f|_y$ es *negativo* pues apunta en la dirección negativa del eje y.

Pero $v_f|_y = v_{oy} - g\,\tau$

$$g \cdot \tau = v_0 \operatorname{sen}\theta + [(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\,g\,H]^{1/2},$$

$$\tau = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\,g\,H}{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}}\,\right].$$

De aquí obtenemos Δ en forma análoga al desarrollo anterior.

V.5.2. Fórmulas adicionales para el movimiento en dos dimensiones

Podemos sacar más información útil de as ecuaciones planteadas. Se trata de obtener el valor de la tangente a la trayectoria en cualquier punto de la trayectoria.

Obtendremos las expresiones correspondientes al caso donde en el instante inicial el objeto se ubica en el origen de coordenadas. Estas ecuaciones cambian si se alteran las condiciones iniciales. la aceleración de gravedad **g** apunta en el sentido negativo del eje vertical **y**. En este caso el movimiento en la dirección **x** es constante y podemos despejar el tiempo desde allí

$$t = \frac{x}{v_{o\,x}} \qquad (a_x = 0).$$

Remplazando este resultado en la expresión para $y(t)$ tenemos

$$y = (\frac{v_{o\,y}}{v_{o\,x}})\, x \,-\, \frac{g\, x^2}{2\, v_{o\,x}^2},$$

recordando que la tangente en cualquier punto de la trayectoria es la dirección de la velocidad en dicho punto,

$$\tan\,\theta_o \,=\, \frac{v_{o\,y}}{v_{o\,x}}, \qquad \text{y en cualquier punto} \qquad \tan\,\theta \,=\, \frac{v_y}{v_{o\,x}} \,\Rightarrow\, y \,=\, \tan\theta_o\, x - \frac{g}{2\, v_0^2\, \cos^2\theta_o}\, x^2. \tag{V.42}$$

Hemos recurrido a

$$V_{o\,x} \,=\, V_o\, cos\theta_o, \quad \text{y en el próximo paso usaremos} \quad \frac{1}{cos^2\theta_o} \,=\, 1 \,+\, \tan^2\theta_o,$$

De aquí se llega a la expresión buscada

$$y \,=\, \tan\theta_o\, x - \frac{g}{2\, v_0^2}\,(\,1 \,+\, \tan^2\theta_o)\, x^2. \tag{V.43}$$

En esta expresión están relacionadas: las coordenadas de un punto cualquiera de la trayectoria $[x,\, y]$, la rapidez inicial v_o y el ángulo con el cual se lanzó la partícula. También se consideró una partícula que pasa por el origen de coordenadas $x_o \,=\, y_o \,=\, 0$.

Con esta ecuación V.43 queda claro que la trayectoria se determina a partir de las condiciones iniciales en el origen.

Dado que la tangente en cualquier punto de la trayectoria está determinada por el vector velocidad en dicho punto, podemos determinar el ángulo θ en cualquier punto de la trayectoria si conoceos la velocidad. Como, en el caso establecido, partícula partiendo desde el origen y **g** en el sentido negativo del eje vertical, tenemos para el eje vertical

$$v_y, \,=\, v_{o\,y} \,-\, g\, t \qquad \text{y dividiendo esta ecuación por} \quad v_x,$$

y recordando que, de acuerdo a nuestro sistema de referencia elegido se cumple que $v_x = v_{o\,x}$ a lo largo de toda la trayectoria

$$\frac{v_y}{v_{o\,x}} = \frac{v_{o\,y}}{v_{o\,x}} - \frac{g\,t}{v_{o\,x}}$$

Como

$$\frac{v_y}{v_x} \,=\, \tan\theta \quad \text{y} \quad t = \frac{x}{v_{o\,x}}$$

Obtenemos

$$\tan\theta \,=\, \tan\theta_o - \frac{g}{v_{o\,x}^2}x, \quad \text{o} \quad \tan\theta \,=\, \tan\theta_o - \frac{g}{v_o^2}(1 \,+\, \tan^2\theta_o)\,x. \tag{V.44}$$

Con esta ecuación conocemos la tangente a la trayectoria en cualquier coordenada **x**, dadas las condiciones iniciales establecidas.

Ejemplo

Calcule el rango de un lanzamiento parabólico: la máxima distancia horizontal recorrida por el objeto al caer a la misma altura desde la cual fue lanzado.

Utilizando la ecuación V.43 tenemos: $y \,=\, 0$

$$0 = x\,[\tan\theta_0 - \frac{g\,x}{2\,v_0^2\cos^2\theta_0}]$$

Una solución es la conocida $x \,=\, 0$, y la otra se obtiene haciendo el paréntesis cuadrado igual a cero

$$x = \frac{2\,v_o^2}{g}\cos^2\theta_o \cdot \tan\theta_o, \qquad x = \frac{2\,v_o^2}{g}\,\operatorname{sen}\theta_o\cos\theta_o.$$

Y obtenemos para el rango de una partícula en estas condiciones

$$\text{RANGO} \,\equiv\, \mathbf{R} \,=\, \frac{v_o^2\operatorname{sen}^2\theta_o}{g},$$

donde usamos la relación trigonométrica $\operatorname{sen}2\,\theta_o \,=\, 2\operatorname{sen}\theta_o\,\cos\theta_o$. El máximo alcance ocurre para $\theta_o = \pi/4$, donde obtenemos

$$R_{\text{máximo}} = \frac{v_o^2}{g} \tag{V.45}$$

Con esta expresión podemos re-escribir la ecuación para la tangente en cada punto de la trayectoria como

$$\tan\theta = \tan\theta_0(1 - \frac{2\,x}{R})$$

Podemos obtener la altura máxima que alcanza la trayectoria con respecto al punto de lanzamiento

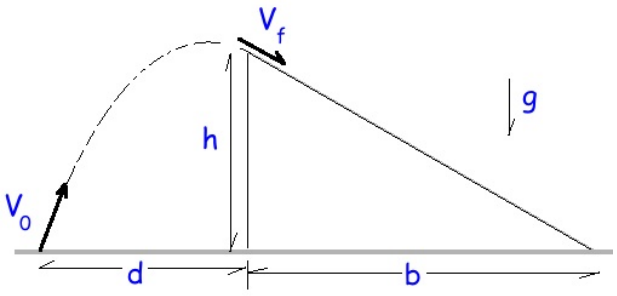
$$v_y^2 - v_{o\,y}^2 \;=\; -2\,g\,(y \;-\; 0), \quad \text{de donde obtenemos} \quad v_{o\,y}^2 \;=\; 2\,g\,h_{\text{máx}},$$

despejando

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_o^2\;\text{sen}^2\,\theta_o}{2\,g}.$$

Ejemplo

a.- Desde una distancia **d** del borde de un tobogán en reposo, se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura **h** y una base **b**, determinar el valor de la velocidad inicial V_o y el ángulo con el cual debe dispararse la bengala, medido con respecto a la horizontal, para que toque al tobogán justo en su vértice superior y, simultáneamente, que en dicho vértice la velocidad de la bengala sea paralela al plano inclinado del tobogán.
b.- Explique en forma clara y concisa cómo cambia este problema si hago las mismas exigencias que en el punto a) pero en esta nueva situación el tobogán se aleja del observador con una velocidad **u** = constante. El vértice del tobogán, aquel que hará contacto con el proyectil, se encuentra a una distancia **d** en el instante t = 0, al lanzar el proyectil.
En esta segunda parte, no realice los cálculos de la parte a.- . Sólo explique los cambios que se deben realizar para considerar esta nueva situación.



Solución

a.- En este problema necesitamos determinar una parábola que partiendo desde el origen (para hacerlo más fácil), llegue al vértice del tobogán cuyas coordenadas son [d, h]. Existen infinitas parábolas que se pueden trazar por dos puntos dados. Se exige, además, para que la solución sea única que en el vértice del tobogán la tangente a la trayectoria debe tener la misma pendiente que

el tobogán. De esta forma se evita que la partícula choque contra la superficie y se deslice a lo largo de la superficie inclinada.

Este es el raciocinio del problema, el esquema de lo que debemos hacer para resolverlo. Ahora recurrimos a las fórmulas para cuantificar el resultado.

Utilizamos la expresión V.43 en el vértice del tobogán. Encontramos una ecuación que contiene las dos incógnitas del problema: $\tan\theta_o$, el ángulo de lanzamiento y v_o, la velocidad inicial de lanzamiento para que pase por el vértice.

$$h \,=\, \tan\theta_o\, d - \frac{g}{2\,v_0^2}\,(\,1 \,+\, \tan^2\theta_o)\,d^2.$$

De todas las parábolas necesitamos aquella que hace un ángulo $\tan\theta \,=\, -\tan\alpha \,=\, -\,h/b$ en el vértice. El signo es relevante e indica que la partícula está cayendo en el momento de aterrizar en el tobogán.

Utilizamos la ecuación V.44 para fijar el ángulo

$$\tan\theta \,=\, -\tan\alpha \,=\, \tan\theta_o - \frac{g}{v_o^2}(1 \,+\, \tan^2\theta_o)\,d.$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. Si notamos que el término $(1 \,+\, \tan^2\theta)$ aparece en ambas ecuaciones, podemos aislarlo y despejar el valor patra $\tan\theta_o$

$$\tan\theta_o \,=\, 2\,\frac{h}{d} + \frac{1}{2}\,\frac{h}{b}.$$

Reemplazando este resultado en la primera expresión, podemos encontrar el valor de v_o^2. (Obténgalo y verifique sus dimensiones.)

Ejercicio

Resuelva el problema anterior, pero en forma inversa. Considere con qué rapidez debe lanzar la pelota desde el vértice del tobogán para llegar al punto de partida.
Se ha cambiado el problema a uno tradicional: lanzamiento de una partícula. El anterior requería fijar un ángulo en una posición determinada.

V.6. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En la sección anterior estudiamos el caso de la aceleración constante en *magnitud* y *dirección*. Ahora proseguiremos con otro caso, donde sólo la *magnitud* de la aceleración permanece constante

en el tiempo, pero su *dirección varía*.

Este es el caso del *movimiento circular*.

Se trata de una partícula que describe una circunferencia. El caso más simple, y con el cual conviene comenzar es el *movimiento circular uniforme*. El término *uniforme*, indica que la partícula recorre arcos iguales en tiempos iguales, sin importar su ubicación en la circunferencia; en consecuencia demora el mismo tiempo en cada giro completo. Este tiempo se denomina el período T del movimiento.

Para estudiar este movimiento conviene *parametrizar* la circunferencia –asignar un número a cada uno de sus puntos, su coordenada– con el fin de poder identificarlos.

V.6.1. Parametrización

Podemos identificar una curva a través de la función que relaciona x con y: $y = y(x)$. Otra alternativa, consiste en asignar a cada punto de la curva un número único y expresar cada una de las componentes, x e y, en función de este número. Esta es la forma *paramétrica* de describir una curva. El parámetro es precisamente el número asignado a cada punto, que en física es, el tiempo o el largo de la trayectoria recorrida.

Ejemplo

a) Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta cuya ecuación paramétrica es:

$$\vec{r}_1(t) = [x(t),\, y(t)] = [t+2,\, t]$$

¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de esta partícula?

Debemos despejar el parámetro t de esta ecuación para encontrar la relación entre la coordenada x e y.

$$\left.\begin{array}{ll} x(t) & = t+2 \\ y(t) & = t \end{array}\right\} \quad x = y+2, \;\Rightarrow\; y = x-2.$$

b) Encuentre la trayectoria $y = f(x)$, de la siguiente partícula cuya ecuación de movimiento se da –en forma paramétrica–, a continuación:

$$\vec{r}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)] = [3+2t, t],$$

La ecuación de la trayectoria se obtiene, al igual que el caso anterior, eliminando t de las dos ecuaciones paramétricas dadas. El resultado es:

$$x = 3+2y, \quad \text{o, de otra forma:} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

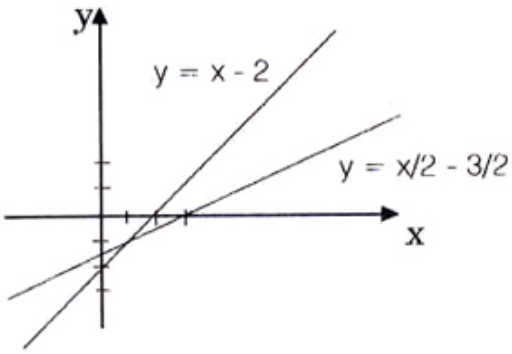


Figura V.23: *Se muestra las trayectorias de dos partículas y su punto de encuentro. En este ejemplo las trayectorias son líneas rectas, pero el mismo método es válido también en casos más generales.*

c) Supongamos ahora que el parámetro t corresponde, efectivamente, al tiempo que marca el reloj que acompaña a cada una de las partículas que siguen las trayectorias descritas arriba. Si los relojes de ambos observadores están sincronizados, encuentre la posición de ambas partículas en el instante $t = 0$. Además, encuentre el instante t en que ellas chocan.

En el instante $t = 0$, las partículas se ubican en:

$$\begin{array}{ll} \text{Partícula } 1: & x_1 = 2 \quad y_1 = 0, \\ \text{Partícula } 2: & x_2 = 3 \quad y_2 = 0. \end{array}$$

Cuando se encuentran, como ambas partículas tienen sus relojes sincronizados, el tiempo que marca cada uno de ellos debe coincidir. Lo mismo sucede con las coordenadas, puesto que deben ocupar el mismo punto del plano simultáneamente. Esta es la definición matemática de choque entre dos partículas.

De este modo, debe cumplirse que:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \text{ en el instante } \; t = \tau.$$

Examinando esta condición en la coordenada–x, tenemos:

$$x_2 = 3 + 2\tau = x_1 = \tau + 2$$

y de aquí se obtiene:

$$2\tau + 3 = \tau + 2, \qquad \tau = -1.$$

Compruebe que la ecuación para la coordenada–y, no aporta información.

El punto donde ambas partículas se encuentran tiene coordenadas:

$$x_1 = x_2 = 1, \qquad y_1 = y_2 = -1. \quad \square$$

Ejemplo

Analicemos la parametrización de una circunferencia. Consideramos dos casos:

a) La circunferencia está centrada en el origen de coordenadas.

b) La circunferencia está centrada en un punto del eje x.

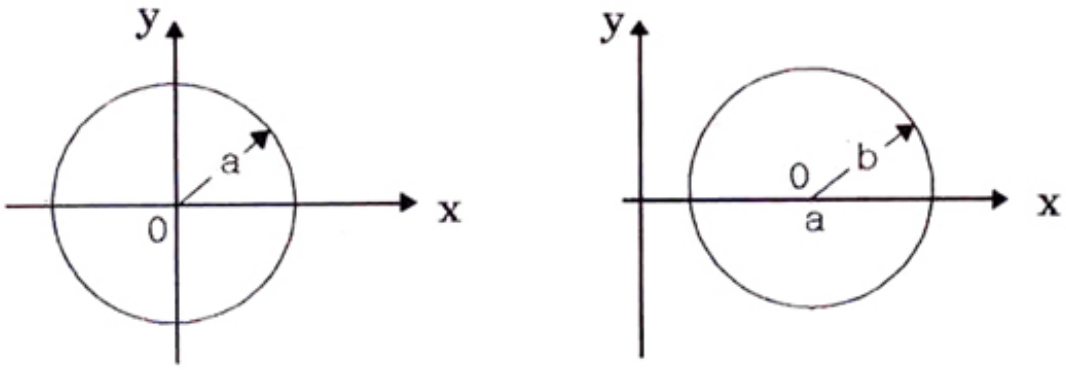


Figura V.24: Aparecen las dos circunferencias que se desea parametrizar. Una de ellas centrada en el origen y la otra en un punto arbitrario del eje x.

La ecuación de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{V.46}$$

Podemos parametrizar esta Figura usando el ángulo que forma el vector que apunta hacia un punto arbitrario de la circunferencia y el eje–x. Para esto procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\,\cos\,\theta, \\ y(t) &= a\,\text{sen}\,\theta, \end{aligned} \tag{V.47}$$

donde $\theta\ \varepsilon\ [0, 2\,\pi]$, es el parámetro que determina cada punto de la curva. En otras palabras, para cada valor del ángulo θ se asocia un único punto de la circunferencia.

La ecuación de una circunferencia cuyo centro **O** tiene las coordenadas [a, 0] es:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 &= b^2 \\ x(t) - a &= b\,\cos\,\theta, \\ y(t) &= b\,\text{sen}\,\theta.\square \end{aligned}$$

V.6.2. Velocidad en el movimiento circular uniforme

Comencemos resolviendo un ejercicio.

Ejemplo

Una partícula recorre una circunferencia con *rapidez constante*, $|\vec{v}_0|$.

a) Calcule la velocidad promedio entre el instante $t = 0$ y $t = 1$.

b) Calcule la velocidad instantánea en $t = 0$.

c) Calcule la velocidad instantánea para un valor arbitrario de t.

Nota

Recordemos que la velocidad es tangente a cada uno de los puntos de la trayectoria, y en este caso específico, tangente a cada uno de los puntos de la circunferencia.

Rapidez constante indica que el módulo del vector velocidad permanece sin variar, pero su dirección cambia. Si retomamos la definición de aceleración: diferencia entre el vector velocidad entre dos puntos dividido por el intervalo transcurrido, podemos darnos cuenta que, por el sólo hecho de cambiar la dirección de la velocidad en cada punto, el vector diferencia no es nulo y, en consecuencia, *existe aceleración*.

Esta es una de las características del *movimiento circular uniforme*; la aceleración aparece únicamente por el *cambio de dirección* de la velocidad. Además, es importante recordar que la dirección de la aceleración siempre *apunta hacia el centro de la circunferencia*. □

Solución

a) El vector $\vec{x}(t)$, que describe la posición de la partícula en cada instante, lo hemos definido como:

$$\vec{x}(t) = [a \cdot \cos\,\omega\, t, \quad a \cdot \operatorname{sen}\omega\, t].$$

De acuerdo a esta definición, en $t = 0$ la partícula se encuentra justo sobre el punto $x = a$, $y = 0$, en el eje x. Esto es lo que se denomina la condición inicial, la posición del objeto en el instante cuando se comienza a medir el tiempo.

Recordemos que la velocidad media se define como la posición final menos la inicial dividida por el tiempo empleado. Esta definición aplicada a cada una de las componentes de la velocidad, da lo siguiente:

$$< \vec{v} >_x = a\,\frac{(\cos\,\omega - 1)}{1} = a(\cos\,\omega - 1)$$

$$< \vec{v} >_y = a\,\text{sen}\,\omega.$$

Notemos que $< v >_x \leq 0$, $\cos\,\omega \leq 1$ (ver Figura).

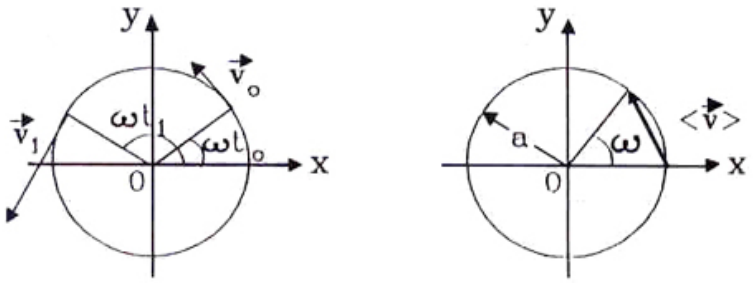


Figura V.25: *El traslado a lo largo de una circunferencia es un caso particular de un movimiento en dos dimensiones. A la derecha se indica el vector velocidad promedio entre los instantes t = 0 y t = 1.*

b) La velocidad instantánea en cualquier punto está representada por la pendiente de la tangente a la curva (a la circunferencia, en este caso). En t=0:

$$\vec{v}_x(t=0) = \lim_{t\to 0} a\,\frac{(\cos\,\omega t - 1)}{t} = a\,\lim_{t\to 0}(\frac{\cos\,\omega t - 1}{t}),$$

si t es muy pequeño, podemos desarrollar la función coseno en la serie de potencias descrita en el Apéndice, y considerar sólo los dos primeros términos de la serie:

$$\cos\,\omega t \simeq 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} + ...$$

$$v_x(t=0) = a\,\frac{\omega^2}{2}\,\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t} = 0.$$

Análogamente, en el eje y,

$$v_y(t=0) = \lim_{t\to 0} a\,\left(\frac{\text{sen}\,\omega t}{t}\right) = a\,\lim_{t\to 0}\frac{(\omega t)}{t} = a\cdot\omega$$

c) Calculemos la velocidad en cualquier instante t. Este es un ejercicio similar al anterior, solo aumenta la complejidad matemática del desarrollo. Calcularemos la componente x de la velocidad, el cómputo de v_y será propuesto como ejercicio.

$$v_x = a\,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\,\omega(t+\Delta t) - \cos\,\omega t}{\Delta t},$$

pero,

$$\cos(\omega t + \omega\Delta t) = \cos(\omega t)\cdot\cos(\omega\Delta t) - \text{sen}(\omega t)\cdot\text{sen}(\omega\Delta t),$$

de aquí tenemos que:

$$\cos(\omega t + \omega\Delta t) - \cos\,\omega t = \cos(\omega t)\cdot[\cos(\omega\Delta t) - 1] - \text{sen}(\omega t)\cdot\text{sen}(\omega\Delta t),$$

finalmente, desarrollando en la última expresión $\cos\,\omega\Delta t$ y sen, $\omega\Delta t$ en serie de potencias y cortando esta serie debido a que $\Delta\, t$ tiende a cero, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\omega t+\omega\Delta t)-\cos\,\omega t}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[-\cos\,\omega t\,\frac{(\omega\Delta t)^2}{2\,\Delta t} - \text{sen}\,\omega t\,\frac{(\omega\Delta t)}{\Delta t}\right],\\
&= -\omega\text{sen}\,\omega\, t + \lim_{\Delta t\to 0}(\frac{\omega^2}{2}\,[cos\,\omega t]\cdot\Delta t),\\
&= -\omega\text{sen}\,\omega\, t.
\end{aligned}$$

Nota

En este último paso hemos usado dos propiedades de los límites que son fáciles de comprobar en casos simples:

- $\lim_{t\to 0} k\cdot A(t) = k\,\lim_{t\to 0}\,A(t)$, donde k es una constante (no depende de t).
- $\lim_{t\to 0}[A(t)+B(t)] = \lim_{t\to 0}[A(t)] + \lim_{t\to 0}[B(t)]$

De vuelta a la penúltima línea de nuestro cálculo, allí vemos que el límite en el segundo término de la ecuación es proporcional a Δt, por lo tanto es tan pequeño como Δt, luego tiende a cero junto con Δt. Concluimos que la velocidad en la dirección x toma el siguiente valor:

$$v_x(t) = -a\cdot\omega\text{sen}\,\omega t \tag{V.48}$$

Para la otra componente de la velocidad se opera en forma similar y se obtiene el siguiente resultado:

Ejercicio

Demuestre que:

$$\begin{aligned}
v_y(t) &= a\,\lim_{\Delta t\to 0}[\frac{\text{sen}(\omega t+\omega\Delta t)-\text{sen}(\omega t)}{\Delta t}]\\
v_y(t) &= a\,[1-(\frac{\omega\Delta t)^2}{2}]\,\frac{\text{sen}\,\omega t}{\Delta t} + \omega\cdot\cos\,\omega t - \frac{\text{sen}\,\omega t}{\Delta t}]\\
v_y(t) &= a\,\omega\,\cos\omega\, t.\quad\square
\end{aligned} \tag{V.49}$$

Resumiendo:

Los vectores relevantes para el movimiento circular uniforme son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= a[\cos\,\omega t, \text{sen}\,\omega t] \\ \vec{v}(t) &= a\cdot\omega\,[-\text{sen}\omega t, \cos\omega t] \end{aligned} \tag{V.50}$$

V.6.3. Velocidad angular

La *velocidad angular* indica el cuociente entre el ángulo descrito y el tiempo que tarda en recorrerlo. Se denomina ω y se mide en radianes por segundo.

En el caso de un movimiento circular *uniforme*, el objeto siempre viaja alrededor de la circunferencia con la misma *rapidez* (recuerde que su velocidad cambia de dirección en cada punto de la circunferencia pero la magnitud de la velocidad permanece constante). Tal como se indicó, definimos T como el tiempo empleado en describir una vuelta completa (2π radianes) a la circunferencia. De esta forma, la *velocidad angular* es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \left[\frac{\text{radianes}}{\text{s}}\right]. \tag{V.51}$$

V.7. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dado un par de vectores arbitrarios: $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el *producto escalar* se define como una operación matemática que asocia a estos dos vectores un número real. Este número tiene una interpretación geométrica bien definida.

V.7.1. Definición del producto escalar

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\,\phi, \tag{V.52}$$

en palabras, el producto escalar entre dos vectores es igual al producto de los *módulos* de ambos vectores por el coseno del ángulo más pequeño que ellos forman.

Por ejemplo, si $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$, con $\vec{A}\neq 0$ y $\vec{B}\neq 0 \Rightarrow cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm(2n-1)\cdot\pi/2$, donde n es un entero cualquiera. De acuerdo a la definición de producto escalar y el hecho que la función $\cos\,\phi$ es *par*, ($\cos\,\phi = \cos\,(-\phi)$), el ángulo que debemos considerar es $\frac{\pi}{2}$.

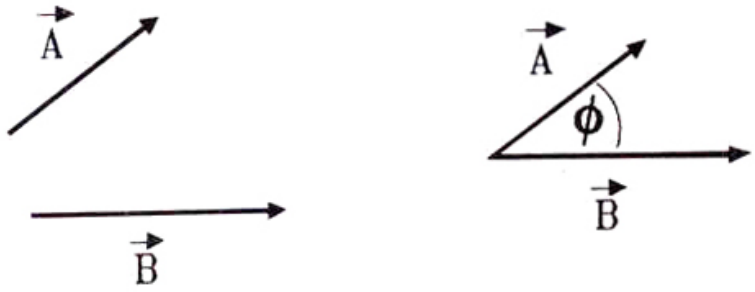


Figura V.26: Con dos vectores podemos definir una operación que consiste en el producto de los módulos de ambos vectores multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman. Esta operación se denomina el producto escalar entre estos dos vectores.

De aquí podemos concluir que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \tag{V.53}$$

si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son idénticamente nulos.

V.7.2. Interpretación geométrica

El producto escalar es el producto entre la magnitud de uno de los vectores (cualquiera de los dos) por la proyección del otro vector sobre el anterior.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,| \cos\phi = |\vec{B}\,|\,|\vec{A}\,| \cos\phi,$$

donde $|\vec{B}\,| \cos\phi$ es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$, o como en la expresión de la derecha, con el vector $\vec{A}$ proyectado sobre el vector $\vec{B}$: $|\vec{A}\,| \cos\phi$.

La función $\cos\phi$, cumple el rol de proyectar uno de los vectores sobre el otro.

De la anterior discusión se desprende que el producto escalar es *conmutativo*, no depende del orden de los factores:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}.$$

V.7.3. Interpretación analítica

A partir de la definición de un vector a través de sus componentes,

$$\vec{A} = [a_x, a_y] \quad \text{y} \quad \vec{B} = [b_x, b_y],$$

se define el producto escalar de estos dos vectores como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \;\equiv\; [a_x, a_y] \cdot [b_x, b_y] = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y. \tag{V.54}$$

Esta definición de producto escalar es equivalente a la anterior y, al igual que ella *invariante*, es decir, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia.

A continuación demostraremos esta propiedad. Para ello usaremos el producto escalar entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, donde hemos *rotado ambos vectores*, manteniendo constante el ángulo entre ellos ϕ. Los ángulos α y β que aparecen en la Figura, son los ángulos que estos vectores hacen con los nuevos ejes coordenados.

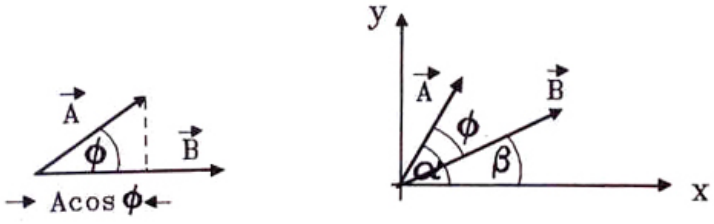


Figura V.27: *El producto escalar es la proyección de un vector sobre el otro. No importa cuál de ellos se proyecte. El resultado no depende del sistema de referencia, sólo depende del ángulo entre los vectores, como se ilustra en la Figura.*

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \;=\; [a_x, a_y]\cdot[b_x, b_y] = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y,$$

usando el hecho que $a_x = |\vec{A}|\,\cos\alpha$, y análogamente para el resto de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se tiene:

$$= \;|\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,|[\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta]$$

$$= \;|\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,|\cos(\alpha-\beta)$$

Como $\alpha-\beta=\phi$, entonces la fórmula anterior se convierte en:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\,|\,|\vec{B}\,|\cos\,\phi.$$

Todos los elementos que aparecen en la definición son independientes del sistema de referencia usado. Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, sus módulos: $|\vec{A}\,|$ y $|\vec{B}\,|$ son únicos, lo mismo sucede con el ángulo entre ellos.

Queda claro que si cambiamos el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cambia el valor del producto escalar entre ellos.

Ejemplo

Usemos esta definición en el caso del movimiento circular. Veamos qué sucede con el producto escalar entre el vector posición y la velocidad de un punto que recorre una circunferencia [V.51].

$$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\vec{v} &= a^2\,\omega\,[\cos\,\omega\,t, \text{sen}\,\omega\,t]\cdot[-\text{sen}\,\omega\,t, \cos\,\omega\,t] \\ &= a^2\,\omega[-\cos\,\omega\,t\cdot\text{sen}\,\omega\,t + \cos\,\omega\,t\cdot\text{sen}\,\omega\,t] = 0 \\ &\Rightarrow \vec{v}\perp\vec{x} \quad \text{en todo instante t.}\end{aligned}$$

Por ejemplo si $\omega\,t = \pi/2$, $\vec{x}(t) = a[0,1]$ y $\vec{v}(t) = a\omega[-1,0]$.

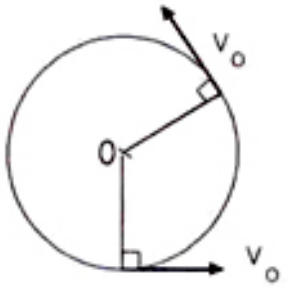


Figura V.28: *El vector velocidad es siempre perpendicular al vector posición en el caso del movimiento circular.*

Analizaremos nuevamente el significado de $\omega\,t$. Como $\omega\,t$ es un ángulo, debe ser una cantidad adimensional, por lo tanto $[\omega] = \frac{1}{T}$. ω recibe el nombre de *velocidad angular* y se puede dar en diversas formas como las que se indican a continuación

$$\omega = \frac{\text{radianes}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}, \tag{V.55}$$

aquí T identifica el tiempo que demora un objeto en recorrer 2π radianes, ó $360°$.

$$\omega = \text{R.P.M} \equiv \text{Revoluciones por minuto} \equiv \frac{\text{número de vueltas}}{\text{1 minuto}},$$

(una vuelta completa $\equiv 2\pi$ radianes, un minuto $\equiv 60$ segundos.)

Ejemplo

$$\omega = 60\ \text{RPM} = 60\,\frac{\text{vueltas}}{\text{min}} = \frac{60\times 2\pi}{60} = 2\pi\,\frac{\text{radianes}}{\text{s}}$$

De esta forma, si ω se expresa en radianes/s y t en segundos, entonces $[\omega\,t] \equiv$ ángulo en radianes.

Ejemplo

Un automóvil recorre un camino con una velocidad promedio de 60 km/hora. Si el diámetro de sus ruedas es 60 cm, ¿cuál es el número de RPM de las ruedas del auto?

En una hora recorrió 60 km y la rueda dio $[60 \times 10^5 \text{ cm}]/[\pi \cdot 60 \text{ cm}]$ vueltas.

$$\frac{60 \times 10^5}{\pi \cdot 60} = \frac{1}{\pi} \times 10^5 \qquad \text{Vueltas por hora.}$$
$$= (10^5/\pi)\frac{\text{vueltas}}{1 \times 60 \cdot \text{min}} \simeq 5{,}12 \times 10^2 \text{ RPM.}$$

V.7.4. Aceleración en un movimiento circular uniforme

Expresión algebraica

Supongamos que un objeto se mueve sobre una circunferencia de radio **r** con una velocidad angular ω constante. Su velocidad tangencial está dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= r\,\omega[-\text{sen}\,\omega\,t, \cos\,\omega\,t] \\
\vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\
a_x(t) &= -r\omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{sen}(\omega\,t + \omega\Delta t) - \text{sen}\,\omega\,t}{\Delta t} \\
&= -r\omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{sen}\,\omega\,t\,\cos\,\omega\Delta t + cos\,\omega\,t\,\text{sen}\,\omega\Delta t - \text{sen}\,\omega\,t}{\Delta t}
\end{aligned}$$

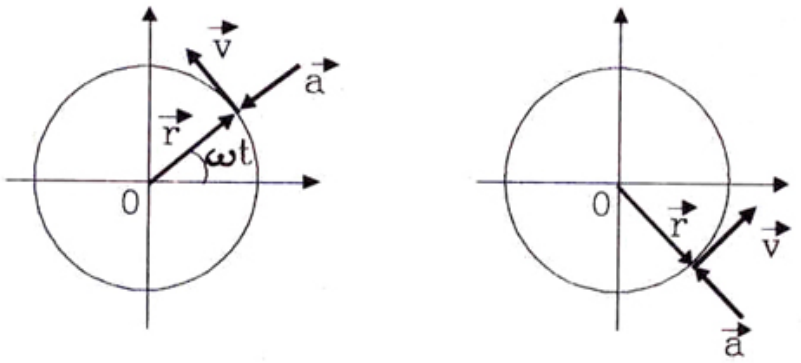


Figura V.29: *Representación gráfica de los vectores posición, velocidad y aceleración en un punto arbitrario de la trayectoria del cuerpo.*

Si $\omega\,\Delta t$ es muy pequeño podemos desarrollar las funciones seno y coseno en serie de potencias. Para ello usamos las expresiones del Apéndice, obteniendo el siguiente resultado.

$$a_x(t) \simeq r\omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{sen}\,\omega\, t[1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2}] + \omega \Delta t\, cos\, \omega\, t - \text{sen}\,\omega\, t}{\Delta t} \tag{V.56}$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero, tenemos:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= -r\omega \cdot \omega \cos\, \omega\, t + 0(\Delta t) \\ a_x(t) &= -r\omega^2 \cos\, \omega\, t, \quad \text{y, análogamente} \\ a_y(t) &= -r\omega^2 \text{sen}\,\omega\, t. \end{aligned} \tag{V.57}$$

Finalmente, a partir de este resultado verificamos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = r \cdot \left(r\omega^2\right) \cos\, \pi = -\left(r\omega\right)^2.$$

$$|\vec{a}| = r\omega^2$$

Por lo tanto $\vec{a} \perp \vec{v}$ y $\vec{a} \,||\, \vec{r}$.

V.7.5. Interpretación geométrica de la aceleración centrípeta

Las figuras ilustran una forma geométrica de llegar a la aceleración centrípeta en el movimiento circular uniforme.

La aceleración asociada al arco de circunferencia AB es:

$$< \vec{a} >= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \qquad \text{con} \quad \Delta \vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

pero como es un movimiento circunferencial *uniforme*, (la velocidad sólo cambia de dirección):

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|.$$

Usando la semejanza entre los triángulos:

$$\Delta\, OAB \sim \Delta\, BCD \quad (\overrightarrow{BC} \,||\, \vec{v}_1),$$

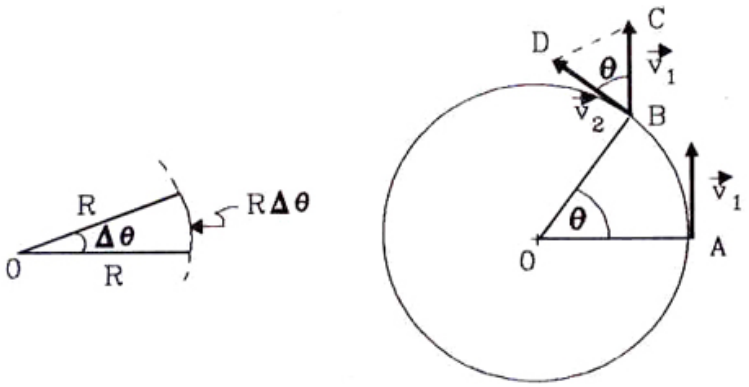
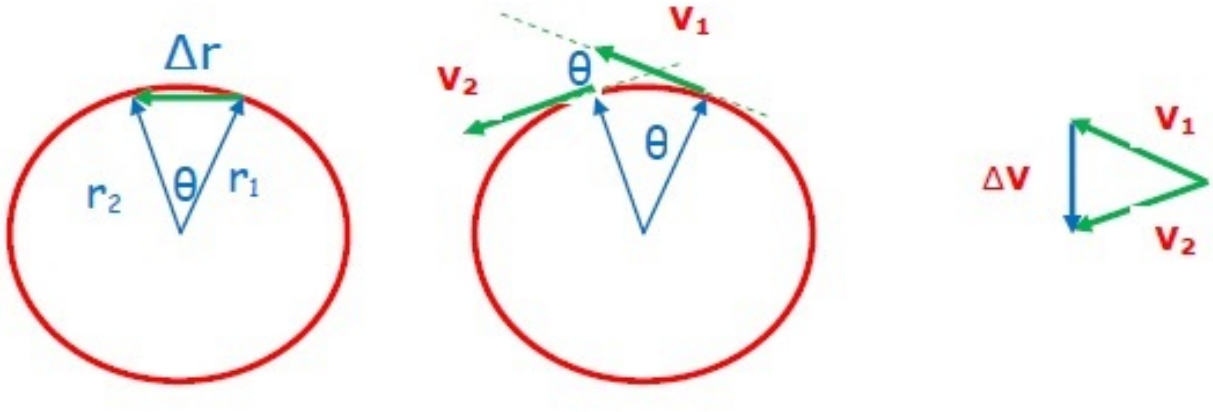


Figura V.30: *Se ilustra en forma geométrica la aceleración centrípeta en el movimiento circunferencial uniforme. El ángulo θ se supone pequeño, a pesar que aparece aquí exagerado para no agrupar demasiado las componentes de la Figura.*



se obtiene la siguiente igualdad entre su cuociente:

$$\frac{|\,\overrightarrow{AB}\,|}{R} = \frac{|\Delta\vec{v}\,|}{v}.$$

A continuación, si tomamos dos instantes muy cercanos, podemos *aproximar* $|\,\overrightarrow{AB}\,|$ por el largo de la cuerda $R\,\Delta\theta$, obteniendo:

$$|\Delta\vec{v}\,| = \Delta\theta\,|\vec{v}\,|,$$

y, finalmente:

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,|\vec{v}| = \omega\cdot|\vec{v}| \tag{V.58}$$

En la Figura, el vector $\overrightarrow{CD}$ representa geométricamente la aceleración $\vec{a}(t)$.

Usando sólo geometría, podemos demostrar que la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia, como explicamos en el siguiente párrafo.

De los triángulos semejantes $\Delta\,OAB$ y $\Delta\,BCD$, definidos anteriormente, se tiene que $\vec{v}_2$ es perpendicular a OB, y de aquí se desprende que en el límite, cuando la cuerda AB tienda a confundirse con la tangente, el vector $\Delta\vec{v}$ tiende a su vez a posicionarse apuntando hacia el centro de la circunferencia.

Analíticamente podemos reforzar este argumento, mostrando que el vector aceleración en el movimiento circular uniforme apunta radialmente hacia el centro de la circunferencia. Para ello necesitamos jugar con vectores unitarios, aquellos de módulo unitario, como $\hat{\imath}$, por ejemplo.

Sabemos que $|\vec{a}| = \omega\,|\vec{v}\,|$. Hemos demostrado que a partir de *cualquier* vector $\vec{A}$, podemos construir un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{A}$: $\vec{A}/|\vec{A}| = \hat{A}$. Luego, $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$, pero a partir de las ecuaciones [V.57]:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -[\cos\,\omega\,t,\,\mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\hat{x} \equiv -\frac{\vec{x}(B)}{|\vec{x}(B)|}$$

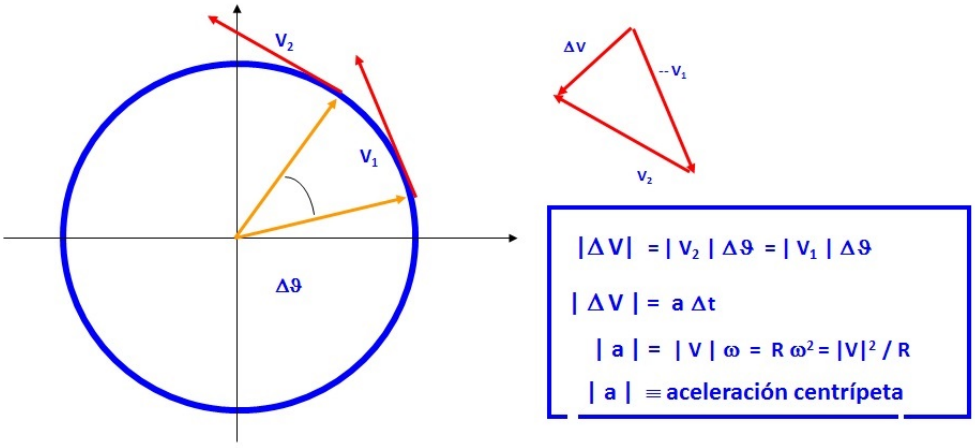


Figura V.31: *Resumen geométrico del movimiento circular uniforme.*

Recordemos que el vector posición de B es:

$$\vec{x}(B) = R[\cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t],$$

su módulo es: $|\vec{x}(B)| = R$, y el término entre corchetes en la expresión anterior para $\vec{x}(B)$, agrupa precisamente a las componentes del vector unitario $\hat{x}$. Este resultado nos permite expresar la aceleración $\vec{a}$ en distintas formas como se señala a continuación:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -\omega|\vec{v}\,|[cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\omega|\vec{v}\,|\,\hat{x}, \\
\vec{a} &= -\omega^2 R[cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\omega^2\,\vec{x}, \qquad \text{(V.59)} \\
\vec{a} &= -\frac{|\vec{v}\,|^2}{R}\,[cos\,\omega\,t, \mathrm{sen}\,\omega\,t] = -\frac{|\vec{v}\,|^2}{R}\,\hat{x}.
\end{aligned}$$

Donde hemos usado $|\vec{v}\,| = \omega\, R$, en la segunda ecuación.

En las expresiones anteriores hemos escrito $|\vec{a}|$ de tres formas diferentes. Los corchetes identifican al vector unitario $\hat{a}$. Una vez que nos hemos familiarizado con las direcciones, magnitudes y sentidos de los vectores aceleración y velocidad, podemos trabajar con ellos usando simplemente sus módulos puesto que el resto de la información ya la conocemos.

La aceleración que sufre un objeto en un movimiento circular y que apunta hacia el centro se denomina **aceleración centrípeta**.

V.8. RESUMEN DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

• El vector velocidad es tangente a la circunferencia en todo instante. Su módulo (longitud del vector) permanece *constante*, pero su dirección cambia de punto a punto en la circunferencia.

• El módulo de la velocidad es $|\vec{v}\,| = \omega R$. Donde ω es la velocidad angular de la partícula: radianes por unidad de tiempo.

• El vector aceleración apunta permanentemente hacia el centro de la circunferencia y su módulo permanece constante. Por esta razón se denomina aceleración centrípeta. Es perpendicular a la velocidad.

• Su valor absoluto es:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}\,|^2}{R}, \text{ escrito de otra forma:} \quad |\vec{a}| = |\omega|^2 R.$$

Ejemplo

$x(t) = a\,\cos(\omega\, t + \phi)$ e $y(t) = b\,\text{sen}(\omega\, t + \phi)$ forman la expresión más general para describir el movimiento de una partícula sobre una elipse generado por el movimiento circunferencial uniforme. Represente este movimiento de la siguiente forma:

$$x(t) = A\,\cos\,\omega\, t + B\,\text{sen}\,\omega\, t, \tag{V.60}$$

$$y(t) = D\,\cos\,\omega\, t + F\,\text{sen}\,\omega\, t, \tag{V.61}$$

donde A, B, D, F son constantes que dependen de a, ϕ y b.

Desarrollando cada una de las funciones trigonométricas definidas en el ejercicio anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\,\cos(\omega\,t+\phi) = a\,[\cos\,\omega\,t\,\cos\,\phi - \text{sen}\,\omega\,t\,\text{sen}\,\phi], \\ &= [a\,\cos\,\phi]\,\cos\,\omega\,t + [-a\,\text{sen}\,\phi]\,\text{sen}\,\omega\,t. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado $\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\,\cos\,\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

Comparando con la función trigonométrica dada, se encuentra que:

$$A = a\,\cos\,\phi, \qquad B = -a\,\text{sen}\,\phi.$$

Análogamente se pueden encontrar D y F.

¿Qué sucede con la velocidad de esta partícula?

Calcularemos su velocidad tomando la razón entre el límite de dos posiciones cercanas y el tiempo que le toma en ir de la posición inicial a la final. Esto lo haremos sólo para una de las componentes y dejaremos el cálculo de la otra componente como ejercicio, porque su desarrollo es muy similar.

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right] \equiv \frac{d\,x(t)}{dt}$$

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}(a\cos[\omega\,t+\phi]) = \frac{d}{dt}[A\cos\,\omega t + B\text{sen}\,\omega\,t]$$

Usando la propiedad que el límite de una suma es la suma de los límites de cada una de las componentes y que las constantes no son afectadas por el límite tenemos:

$$v_x(t) = A\,\frac{d}{dt}(cos\,\omega\,t) + B\,\frac{d}{dt}(\text{sen}\,\omega\,t),$$

pero, esta derivada ya la hemos estudiado antes, en la descripción del movimiento circular uniforme. El resultado es:

$$v_x(t) = -A\,\omega\,\text{sen}\,\omega\,t + B\,\omega\,\cos\,\omega\,t,$$

Reemplazando las expresiones para A y B escritas anteriormente,

$$v_x(t) = a\,\omega\,[-cos\,\phi\,\text{sen}\,\omega\,t - \text{sen}\,\phi\cos\,\omega\,t],$$

y usando la definición del valor del seno de una suma de ángulos tenemos:

$$v_x(t) = -a\,\omega\,\text{sen}(\omega\,t+\phi). \tag{V.62}$$

Se deja propuesto demostrar que: $v_y(t) = b\,\omega\,\cos\,(\omega\,t+\phi)$. □

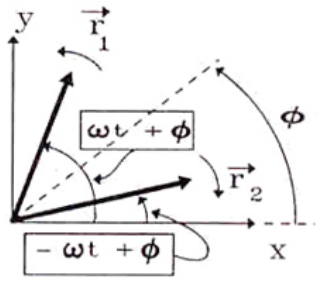
Ejercicio

Para los valores de $x(t)$ e $y(t)$, ya dados, demuestre que:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\right] = \frac{d}{dt}v_x = -a\,\omega^2\,\cos(\omega\,t+\phi),\quad a_y = -b\,\omega^2\,\text{sen}(\omega\,t+\phi)$$

Ejemplo

Dos vectores, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, de igual módulo giran con velocidad angular $+\omega$ y $-\omega$ respectivamente. En t = 0 ambos apuntan en la misma dirección y sentido (ver Figura). Demostrar que el vector resultante de la suma de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es un vector que *no* gira, sino que oscila a lo largo de la dirección determinada por el ángulo ϕ.



Nota:

Usaremos las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\cos(\pm\,\omega\,t+\phi) \;=\; \cos\,\omega\,t\,\cos\,\phi \mp \text{sen}\,\omega\,t\,\text{sen}\,\phi \qquad \text{(V.63)}$$

$$\text{sen}(-\omega\,t+\phi) \;=\; -\text{sen}\,\omega\,t\,\cos\,\phi + \cos\,\omega\,t\,\text{sen}\,\phi \qquad \text{(V.64)}$$

Desarrollando cada uno de los vectores en componentes tenemos:

$$\vec{r}_1 \;=\; a[cos(\omega\,t+\phi),\quad \text{sen}(\omega\,t+\phi)] = a\,\cos(\omega\,t+\phi)\,\hat{\imath} + a\,\text{sen}\,(\omega\,t+\phi)\,\hat{\jmath},$$

$$\vec{r}_2 \;=\; a\,[cos(-\omega\,t+\phi),\quad \text{sen}(-\omega\,t+\phi)] = a\,\cos(-\omega\,t+\phi)\,\hat{\imath} + a\,\text{sen}(-\omega\,t+\phi)\,\hat{\jmath}.$$

La resultante de la suma de ambos vectores es la suma de sus componentes:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = a\,[cos(\omega\,t+\phi) + \cos(-\omega\,t+\phi)]\,\hat{\imath} + a\,[\text{sen}(\omega\,t+\phi) + \text{sen}(-\omega\,t+\phi)]\,\hat{\jmath},$$

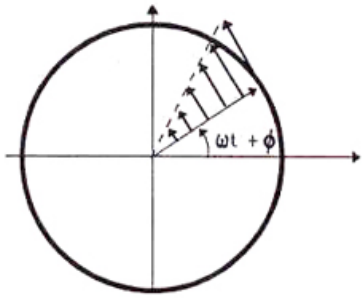
Después de aplicar las igualdades trigonométricas señaladas anteriormente, se obtiene:

$$\vec{R} = \{a\,\cos\,\omega\,t\}[\cos\,\phi\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\phi\,\hat{\jmath}]. \tag{V.65}$$

De la ecuación anterior vemos que el vector suma de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ permanece apuntando siempre en la misma dirección ϕ, como lo indica el vector $[\cos\,\phi\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\phi\,\hat{\jmath}]$. Por otra parte el módulo del vector $\vec{R}$ está dado por $|\vec{R}| = a\cos\,\omega\,t$, de donde concluimos que varía sinusoidalmente en el tiempo.

Ejercicio

Demuestre que la magnitud de la velocidad de un punto de la rueda, en cualquier instante de tiempo, crece linealmente con la distancia de este punto al centro.
Dibuje el vector velocidad asociado a distintos radios de la rueda.



Solución

$$\vec{v} = r\,\omega\,[-\text{sen}(\omega\,t+\phi), \cos(\omega\,t+\phi)]$$

$$|\vec{v}\,| = r\,\omega, \qquad \vec{v}\cdot\vec{r} = 0$$

V.9. EJERCICIOS

1.– a) Un hombre camina a lo largo de una circunferencia centrada en el origen, desde la posición $x = 5$ m, $y = 0$, a una posición final $x = 0$, $y = 5$ m. ¿Cuál es su desplazamiento?

b) Un segundo hombre camina desde la misma posición inicial a lo largo del eje x hasta el origen y luego camina a lo largo del eje y hasta $y = 5$ m, $x = 0$ ¿Cuál es su desplazamiento?

2.– Exprese los siguientes vectores en función de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

a) Una velocidad de 10 m/s y un ángulo de elevación de $60°$.

b) Un vector $\vec{A}$ de magnitud $A = 5$ y $\theta = 225°$ con respecto al x.

c) Un desplazamiento desde el origen al punto $x = 14$ m, $y = -6$ m.

3.– Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la Figura, encuentre sus componentes según x e y. Determine las componentes, magnitud y dirección de la suma $(\vec{A} + \vec{B})$ y de su diferencia $(\vec{A} - \vec{B})$.

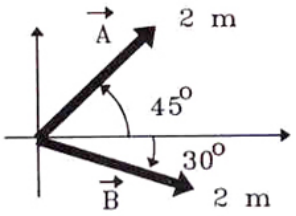


Figura V.32:

4.– Las componentes del vector posición de una partícula (x, y) son $(2m,\ 3m)$ en t = 0 , $(6m,\ 7m)$, en t = 2 s y $(13m,\ 14m)$ en t = 5 s.

a) Encuentre $\vec{V}_M$ (velocidad media) entre t = 0 y t = 2 s.

b) Encuentre $\vec{V}_M$ entre t = 0 y t = 5 s.

5.– Una partícula tiene un vector posición dado por $\vec{r} = (30\,t)\,\hat{\imath} + (40\,t - 5\,t^2)\hat{\jmath}$ donde t representa el tiempo y las dimensiones de los números son tales que r tiene dimensiones de longitud (metros). Encuentre los vectores velocidad y aceleración instantáneas para este movimiento.

6.– Una partícula tiene una aceleración, constante, determinada por:

$$\vec{a} = (6 \cdot \hat{\imath} + 4 \cdot \hat{\jmath})[m/s^2].$$

Si en $t = 0$, su velocidad es nula y su vector posición es $\vec{x}_0 = 10 \cdot \hat{\imath}$ [m]:

a) Encuentre los vectores velocidad y posición en un instante t cualquiera.

b) Encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano y dibújela.

7.– Las direcciones de dos barcos A y B que se alejan del puerto forman un ángulo θ entre ellas como se indica en la Figura (V.33).

El barco A se aleja con una rapidez constante de 5 m/s, en tanto que el barco B se mueve con *aceleración constante* de 2 m/s^2. Si ambos partieron simultáneamente del puerto, y la rapidez inicial de B era nula, calcule:

a) ¿Cuál es la distancia que separa los barcos al cabo de 10 segundos?

b) ¿A qué distancia están del puerto y cuál es la velocidad de cada uno de ellos en ese instante?

8.– Desde un avión situado a una altura h = 1 km, se lanza una bomba con velocidad inicial V_0, horizontal. Por efecto del viento la bomba experimenta, además de la aceleración de gravedad, una desaceleración horizontal cuya magnitud es de 1 m/s^2. Si $V_0 = 50$ m/s, calcule:

a) El tiempo que demora en caer. ¿Cómo se afectaría el resultado anterior si no hubiera viento?

b) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento toca Tierra?

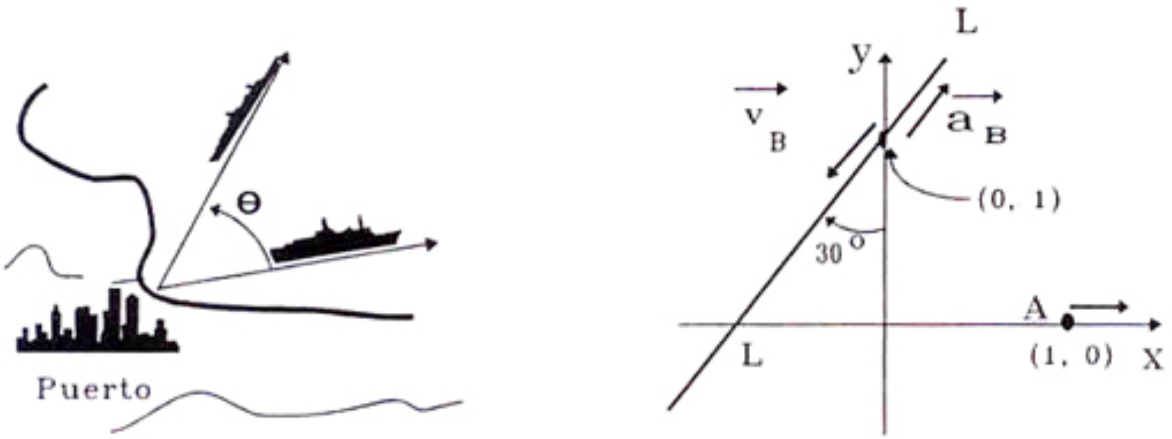


Figura V.33:

9.– La partícula A de la Figura, se desliza sobre el eje x y la partícula B sobre la recta L-L que forma un ángulo de 30^{O} con el eje vertical.

En $t = 0$, A se encuentra en (1, 0) y B en (0, 1). Sus velocidades y aceleraciones son: $V_A = 0$, $a_A = 2$ m/s^2 (constante), $V_B(0) = 4$ m/s y $a_B = 4$ m/s^2 (constante). El sentido de cada una de ellas aparece indicado en la Figura.

A partir de estos datos determine a qué distancia se encuentran ambos móviles cuando la velocidad de B se hace instantáneamente cero.

10.– Un proyectil se lanza con velocidad inicial $\mathbf{V}_0$ y ángulo de lanzamiento θ, ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de altura desconocida **h**, rozando sus dos vértices **A** y **B**.

a.- Dibuje, a mano alzada, la trayectoria que debe recorrer esta partícula. y determine si existe una simetría en esta trayectoria que le facilite la resolución del problema. Además , indique ¿Cuáles es la condición o las condiciones que se deben cumplir en los puntos **A** y **B** de la trayectoria?

b.- Calcular la distancia **x** que separa el punto de lanzamiento, de la pared más cercana del obstáculo.

b.- Calcular la altura **h** de la barrera.

11.– Se lanza un proyectil desde la cima de una cumbre cuya altura es de 600 m, con una velocidad $V_0 = 200$ m/s y un ángulo $\theta = 60°$. Despreciando la resistencia del aire, ¿en qué punto toca tierra el proyectil?

12.– Desde lo alto de una escalera con peldaños de largo a y altura a, se lanza un proyectil con velocidad horizontal $\vec{v}_0$.

Determine en función de los parámetros dados, el peldaño en que caerá el proyectil.

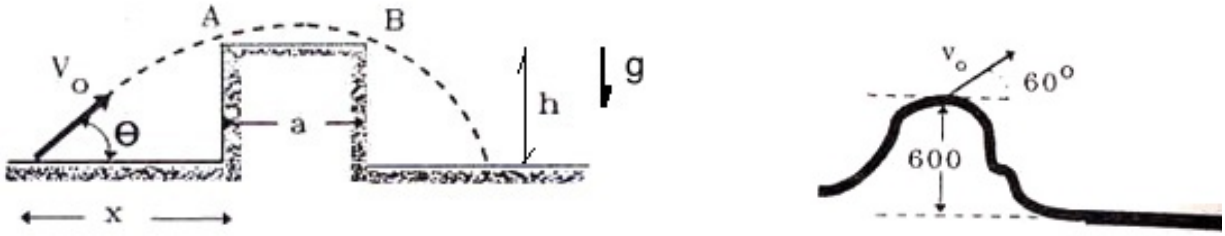


Figura V.34:

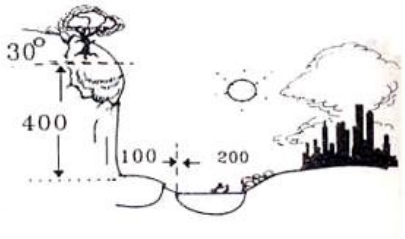


Figura V.35:

13.– Una gran roca está suelta sobre un risco de 400 m de altura, cerca de una pequeña villa, a la cual amenaza con su caída. Se calcula que la inclinación media del risco es de 30° y que al caer, tendrá una rapidez 50 m/s justo al enfrentar el precipicio.

Junto a la villa hay un lago de 200 m de diámetro y que a su vez se encuentra a 100 m de la base del risco.

a) ¿Dónde caerá la roca?

b) ¿Qué rapidez tendrá al llegar al suelo?

14.– El motociclista de la Figura desea saltar por sobre N autos de altura h y ancho d. Para ello usará una rampa inclinada (*que no tiene roce*) en un ángulo α y de altura H. El motociclista ingresa a la rampa con una velocidad v_0 y sube por ella sin *acelerar* (ya que no puede, debido a la ausencia de roce).

Se pide que calcule la velocidad mínima con la cual debe ingresar el motociclista a la rampa, si desea saltar por sobre 14 autos dispuestos como muestra la Figura.

Los valores numéricos para las variables son: $h = 1$ m $H = 12$ m $\alpha = 45^\circ$ $d = 2$ m.

15.– Un agricultor se encuentra viajando en su camioneta a una velocidad tal que sus ruedas, de 40 cm de radio, giran a una razón de seis vueltas por segundo. Este conductor –infringiendo abiertamente el reglamento,– lleva en la parte trasera a un niño. Este al encontrar una naranja en el piso, la lanza con un ángulo de 45° y con una velocidad $v_N = 20\,m/s$ *respecto a la camioneta*. Si la altura de este lanzamiento es de 1 metro; ¿ a qué distancia del punto P, que marca el lugar de lanzamiento, cayó la naranja? (No considere el roce con el aire).

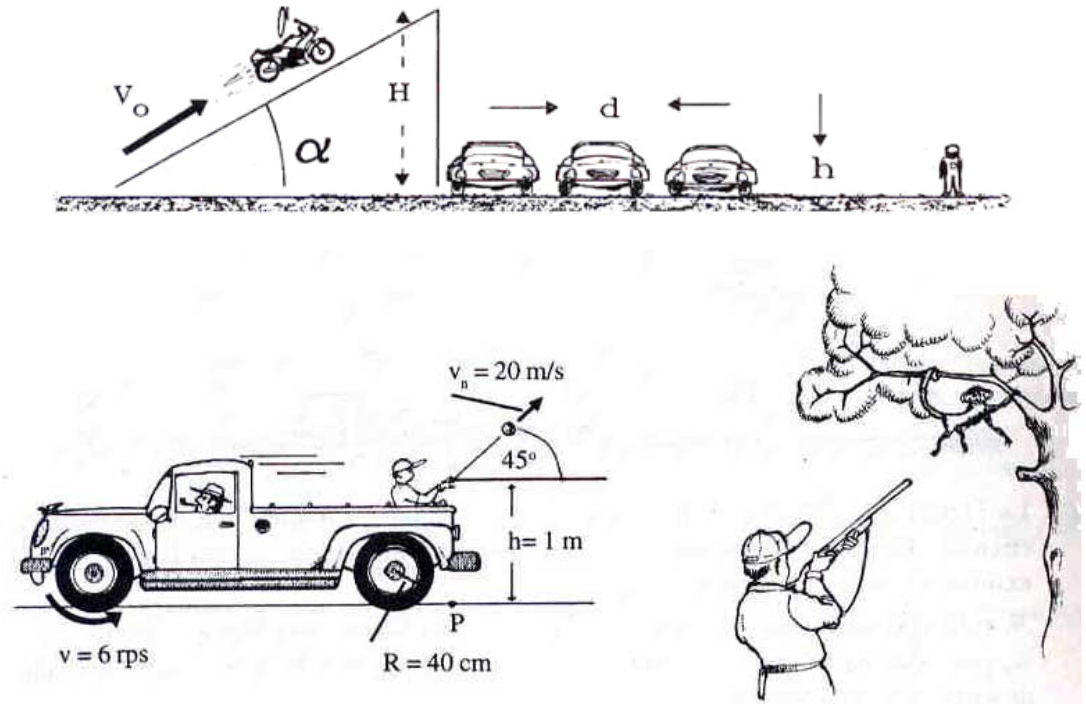


Figura V.36:

16.– Un mono cuelga de una rama a una altura **h** de un árbol. Un investigador le apunta directamente con un rifle con la intención de adormecerlo, desde una distancia **d**. En el mismo instante en que dispara la inyección, el mono se suelta del árbol. ¿Cree Ud. que se logró adormecer al monito?

17.– Un pájaro vuela horizontalmente con velocidad V y a una altura constante h. En el instante que sobrevuela a un rufián armado de una piedra, éste se la lanza con su máxima velocidad posible: **U**.

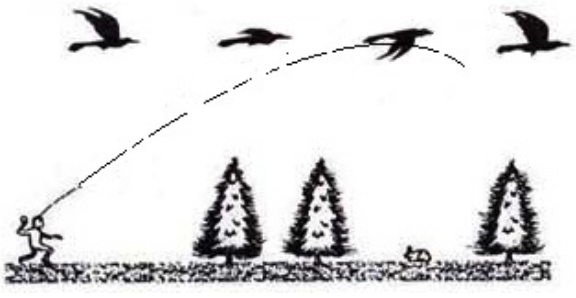


Figura V.37:

a.- ¿Cuál es el valor mínimo de la velocidad **U**, para que el proyectil pueda alcanzar al pájaro?

b.- ¿Cuál es el ángulo, medido con respecto a la horizontal, con el cual debe disparar la piedra (en el caso que lance la piedra con la velocidad mínima)?

c.- ¿Qué distancia, con respecto a la posición del rufián, recorre el pájaro antes de ser malherido?

d.- ¿Cómo cambia la respuesta a la pregunta a.- , si el rufián lanza la piedra al pájaro cuando éste se le acerca?

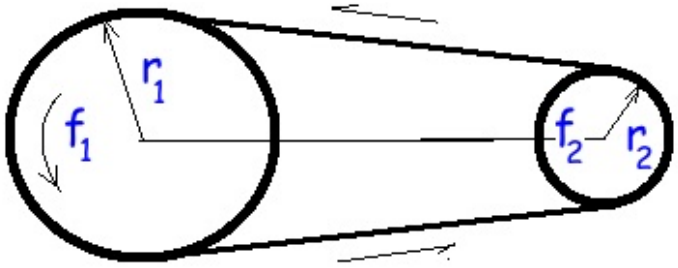


Figura V.38:

18.– La Figura (V.38) muestra dos ruedas de radios r_1 y r_2, las cuales están unidas por una correa de transmisión inextensible. Los ejes de las ruedas permanecen fijos.

a.- Compare las velocidades angulares y tangenciales de ambas ruedas.

b.- Si la rotación de las ruedas es uniforme, encuentre una relación entre las frecuencias f_1 y f_2, y los radios r_1 y r_2.

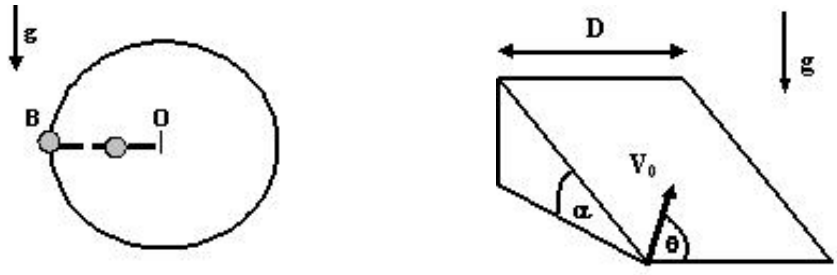


Figura V.39:

19.– Un disco de radio $r = 1{,}0$ m gira, uniformemente, a 120 revoluciones por minuto (RPM) en torno a un eje horizontal que pasa por su centro O. En un cierto instante, 2 partículas situadas a las distancias r y $r/2$ sobre el mismo radio OB, se desprenden del disco cuando ese radio está pasando por la posición horizontal. Calcular los giros que realiza el disco en el intervalo entre las sucesivas llegadas de ambas partículas al nivel de partida. (Ver Fig. (V.39)

20.– Un cuerpo se desliza sin roce sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con el plano horizontal. Ver Fig.(V.39). Desde uno de los vértices de la base de ancho D, se impulsa el objeto cuesta arriba por la pendiente del plano, en una dirección inicial con un ángulo θ con la horizontal. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la velocidad inicial V_o del objeto para no sobrepasar el vértice opuesto de la base?

21.– La Figura (V.40) muestra dos autos que corren con *rapidez constante* en un autódromo circular. El auto A corre por la pista interior de radio r_A y el auto B por la pista exterior de radio r_B, con $r_A < r_B$.

Se sabe que la rapidez de B es v_B, ¿cuál es la máxima rapidez que puede tener A, para que en el caso más adverso, alcance dos veces a B, mientras éste último describe una sola vuelta al circuito?

22.– La Figura (V.40) indica la conexión en una caja de cambios de un automóvil. Si la razón entre los radios de ambos engranajes es la misma para ambos pares, encuentre este número si deseamos que en la primera marcha con el motor a 2000 RPM, el auto tenga una velocidad de 30 Km/h. Por cada cinco vueltas en la salida de la caja de cambios, las ruedas dan una vuelta. El radio de las ruedas es de 50 cm.

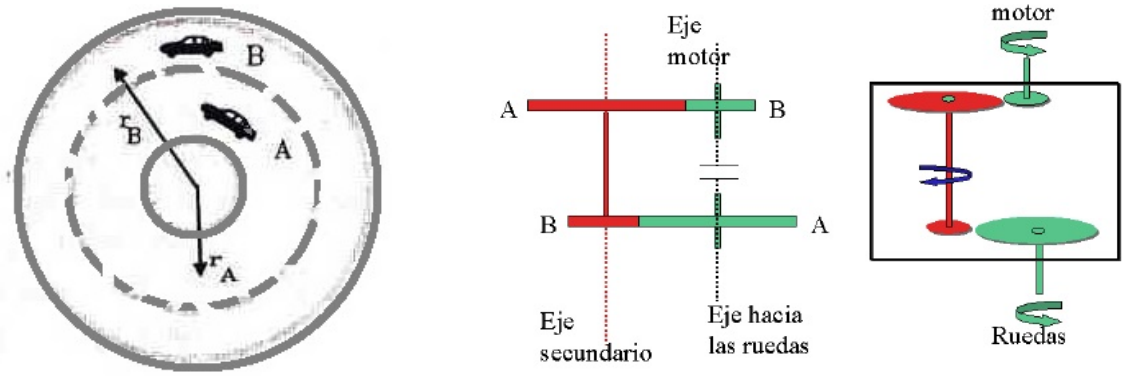


Figura V.40:

23.– a.- En la figura aparece el sistema de engranajes de la caja de cambios de un motor. Si el eje que proviene del motor gira a N RPM, calcule cuál el valor de las RPM en el eje de salida de la caja de cambio (marcado como *eje hacia las ruedas*) en función de la razón entre los radios de los engranajes: $\mathbf{R}_A$ / $\mathbf{R}_B$ = 5/2.

b.- Suponga que la conexión mostrada en a.- corresponde a la primera marcha en un auto. Si se mantiene la razón entre los engranajes de entrada a la caja de cambio, pero se cambia aquella que va a las ruedas de forma que $\mathbf{R}'_B$ /$\mathbf{R}'_A$ = 3/4, encuentre cual es la relación entre las RPM provenientes del eje del motor y las RPM del eje que va a las ruedas.

c.- ¿Cómo haría Ud. para que el eje que va hacia las ruedas gire en sentido contrario al indicado en los dos casos anteriores. En otras palabras, ¿cómo funciona la reversa en un auto, a

partir de este esquema?

24.– En la figura (V.41) a la izquierda, aparece una cadena de longitud **L** y masa por unidad de largo μ, que se sostiene en forma vertical desde de su extremo superior y con su extremo inferior a una distancia **h** del suelo. En t=0, la persona suelta la cadena que comienza a caer en caída libre. Note que cada eslabón cae con la misma aceleración **g**.

a.- Calcule cuánto demoró el primer eslabón el tocar el piso en función de los datos proporcionados.

b.- Suponga que apenas el primer eslabón toca el piso, éste comienza a moverse hacia la derecha. Calcule la velocidad con la cual debe deslizarse el piso para que cada eslabón de la cadena vaya formando una línea recta sobre el piso. ¿Debe ser constante la rapidez del piso? ¿Está relacionada con la rapidez de cada eslabón?

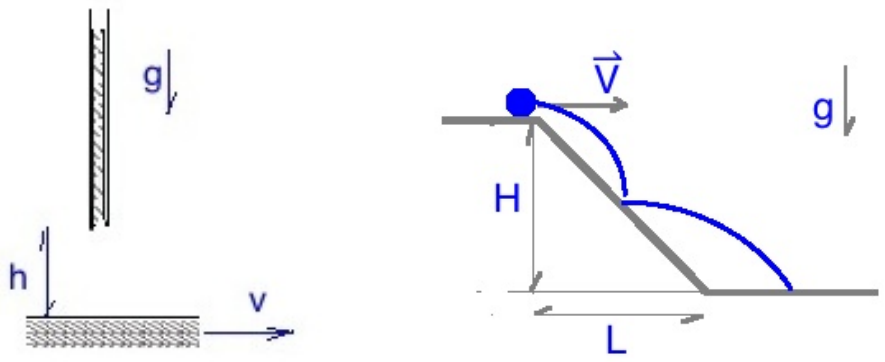


Figura V.41:

25.– Se lanza una bolita horizontalmente con una velocidad de módulo $|\mathbf{V}|$, tal que alcanza a dar un bote sobre la superficie del plano inclinado antes de volver a caer sobre el plano horizontal, como se ilustra en la Figura (V.41). Considere que el rebote sobre el plano inclinado es elástico, esta condición es equivalente a decir que el módulo de la componente de la velocidad *normal al plano inclinado* es la mismo antes y después del contacto con el piso. Esta velocidad cambia de sentido antes y después del choque. Además esta condición indica que la componente paralela al plano permanece igual antes y después del choque, con la misma rapidez, dirección y sentido.

a.- Calcule la velocidad (dirección y sentido) de la partícula justo antes de rebotar en el piso inclinado.

b.- Con el resultado de la parte a.- , calcule la velocidad de la partícula justo después del rebote en el piso.

c.- Calcule las coordenadas del punto donde toca el piso horizontal después de rebotar en el plano inclinado.

d.- ¿Cual es el tiempo total que toma la bolita en realizar la trayectoria desde la parte superior hasta que toca el piso?

26.– Desde el punto **O** se lanza una partícula con rapidez $\mathbf{V}_o$. Se realizan diversos lanzamientos con ángulos 0^o, 15^o, 30^o, 45^o, 60^o, 75^o y 90^o.
Encuentre el lugar geométrico (una curva) que pase por todos los puntos de máxima altura de cada una de las parábolas especificadas.

a.- Muestre que el máximo de una parábola cualquiera ocurre en

$$x_m = \frac{V_o^2}{2\,g}\,\sin 2\alpha, \qquad y_m = \frac{V_o^2}{4\,g}\,[1 - \cos 2\,\alpha]$$

b.- Con estas expresiones construya e identifique la curva y las constantes que se incluyen

$$\frac{x_m^2}{a^2} + \frac{(y_m - b)^2}{b^2} = 1.$$

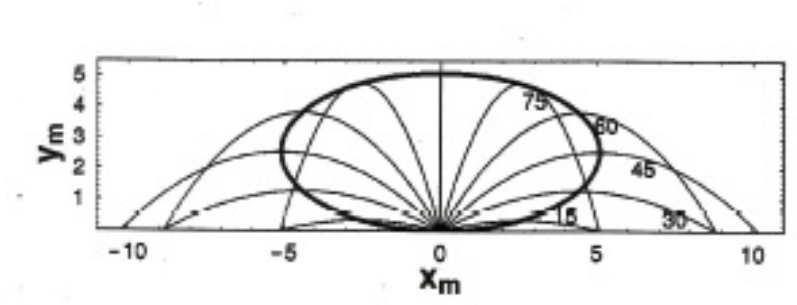


Figura V.42: *Ref: Am.J.Phys.* **72** *(8), August 2004, J.L. Fernández-Chapou et al.*

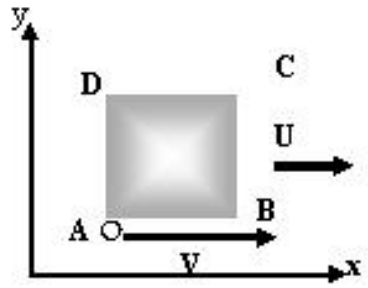
27.– El cuadrado de la Figura representa un pelotón de soldados marchando cuya extensión es **L** y que marcha con una rapidez **U**. En un cierto instante el oficial del pelotón, señalado con la letra **(O)** en la Figura, se propone pasar revista a las filas mientras éstas marchan y sin distorsionar su formación. El oficial sigue la secuencia indicada AB, BC, CD y finalmente DA. El oficial mantendrá una rapidez $\mathbf{V} > \mathbf{U}$, durante toda la revista.

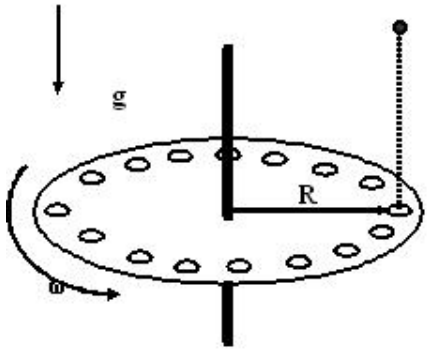
a.- Dibuje la trayectoria del oficial O en el plano x–y. Determine explícitamente la dirección con que el oficial debe desplazarse a lo largo del tramo BC, para evitar apenas que los soldados le pisen los talones.

b.- Calcule el tiempo que tarda el oficial en recorrer los lados AB y CD.

c.- Calcule el tiempo que requiere el oficial para revisar el pelotón.

28.– Un disco horizontal gira con una velocidad angular constante ω. Desde una cierta altura, periódicamente se dejan caer bolitas, una cada **T** segundos. En el disco hay **N** agujeros distribuidos uniformemente a una cierto radio. El diámetro de las perforaciones permite que las





bolitas las atraviesen con cierta holgura.

a.- Calcular el valor mínimo de ω (mayor que cero!) para el cual las bolitas pasan a través de las perforaciones del disco sin dificultad.

b.- ¿Con qué valor de la velocidad angular ω debe girar el disco para que las bolitas pasen saltándose una perforación entre cada cruce del disco? (una por medio?

29.– a.- Calcule la velocidad angular de la Tierra en RPM, radianes por segundo y en hertz.

b.- Usando el valor anterior y suponiendo que se lanza verticalmente un satélite desde el ecuador de la Tierra con una velocidad inicial de 10.000 km/hora, ¿Cuál es la rapidez total de esta nave vista desde un observador en reposo en el espacio? (Considere que está ubicado en la posición óptima para medir esta velocidad sin problemas de proyección de vectores u otros. Por ejemplo justo sobre el polo Norte.)

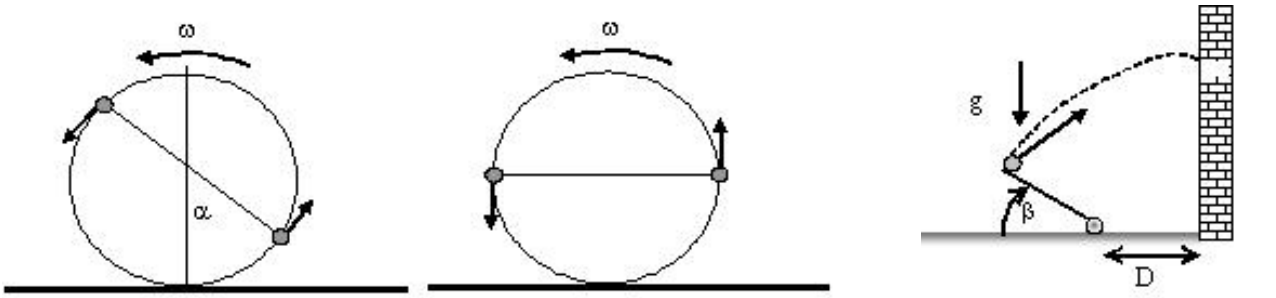
c.- Se debería incluir en este cálculo la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol? O, puesto de otra forma: ¿es relevante?

La Tierra se haya a 8 minutos-luz del Sol. La rapidez de la luz es de 300.000 km/s.

30.– Una rueda gira en torno a su eje horizontal, a **30 RPM**, de manera que su parte inferior queda a nivel del suelo sin rozarlo. Sobre el borde de la rueda se han adosado dos piedrecitas, en posiciones diametralmente opuestas.

a.- Suponga que cuando el diámetro que une a las piedras alcanza la posición horizontal, éstas se desprenden del borde en forma simultánea, y una de ellas llega al suelo antes que la otra. Se observa que durante el intervalo entre la llegada al suelo de una y otra piedra, la rueda da una vuelta completa. Determine el radio de la rueda.

b.- Suponga que las piedras se desprenden de la circunferencia desde una cierta posición simultáneamente. ¿Que ángulo debe formar la línea que une ambas piedras con la vertical en ese instante para que ambas piedras lleguen al piso al mismo tiempo?



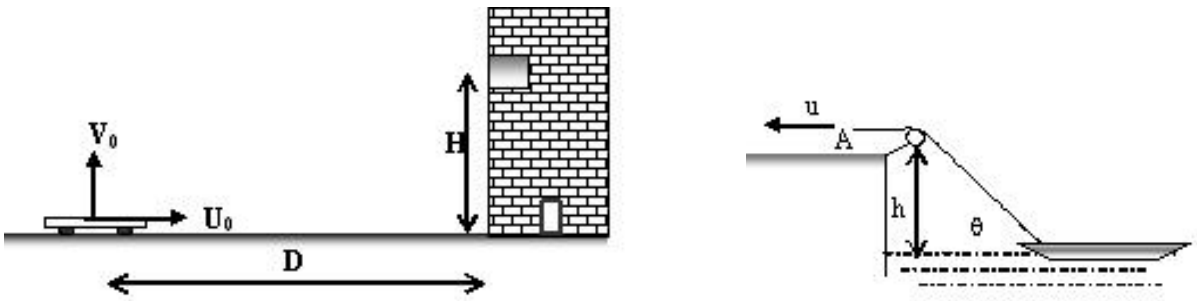
31.– Una catapulta está diseñada para lanzar proyectiles hacia el interior de un castillo a través de una de sus ventanas. La ventana está ubicada a una altura **H** con respecto al piso. Cuando los proyectiles se desprenden de la catapulta, la velocidad angular de ésta es ω, y el ángulo del brazo de la catapulta con respecto al piso es θ . Determine la longitud **L** del brazo para que ésta logre su cometido. Suponga **D=0**, por simplicidad. ¿Puede existir más de una solución?

32.– Un carro posee un dispositivo que le permite lanzar proyectiles en dirección vertical a una velocidad $\mathbf{V}_o$. Si el carro se mueve en dirección horizontal, a una velocidad $\mathbf{U}_o$, calcule

a.- La distancia **D** a la que debe disparar un proyectil para que éste impacte en la ventana del edificio, ubicada a una altura **H** del suelo.

b.- Suponiendo conocida la distancia **D**, calcule el ángulo con que llega el proyectil a la ventana, respecto a la horizontal.

c.- Explique el significado físico del resultado obtenido en b.- .



33.– Un niño tira del extremo **A** de la cuerda con una rapidez **U**. ¿Con qué rapidez se acerca el bote al muelle?

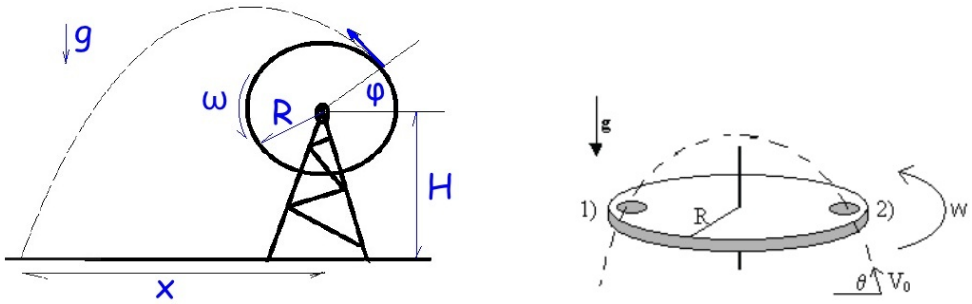
Resuelva este problema utilizando el Principio de Superposición y geometría.

(Respuesta: $\mathrm{V} = \mathrm{U}\,\dfrac{(\sqrt{x^2 + H^2})}{x} = \dfrac{U}{\cos\theta}$).

34.– Un niño disfruta del viaje en una rueda de un carrusel vertical de radio **R**, con una velocidad angular ω. Repentinamente cuando está en una posición descrita por un ángulo ϕ con respecto a la horizontal se le escapa involuntariamente su celular. Se pide encontrar a qué distancia **x** cae el celular en el piso. Mida horizontalmente desde la proyección del eje de la rueda sobre el piso.

Elija convenientemente un sistema de referencia para plantear este problema.

Al soltar el celular éste tiene instantáneamente la velocidad tangencial del borde la rueda del carrusel.



35.– Un disco gira con velocidad angular ω y posee una única perforación ubicada a una distancia **d** del centro del disco. En cierto instante y justo debajo del disco, se lanza una pelota de modo que al elevarse, atraviesa el disco cuando el agujero pasa por la posición señalada con el número 2. Se desea que en su caída cruce a través del disco cuando la perforación se encuentra en la posición señalada con el número 1, diametralmente opuesta a la del punto de lanzamiento. Calcule el valor mínimo que debe tener V_o y el correspondiente ángulo θ para que esto sea posible.
La pelota cabe sin restricciones dentro de la perforación.

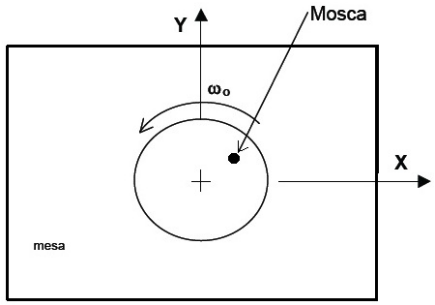


Figura V.43:

36.– Una mosca camina sobre un disco de radio **R** , que rota con una velocidad angular ω_o con respecto a una mesa que lo sostiene.

La mosca viaja desde el centro del disco hacia el borde con una aceleración constante $\mathbf{a}_o$, partiendo desde el reposo y siguiendo una línea recta trazada sobre el disco y que comienza en el centro del disco.

a.- Encuentre el valor de la razón entre $\dfrac{a_o}{\omega_o}$ de modo que cuando el disco complete una vuelta, la mosca alcance el borde del disco. ¿Cuál es la dimensión de esta cantidad?

b.- Dibuje y escriba en notación vectorial la posición de la mosca en dos instantes separados por un intervalo $\Delta\, t$. Seleccione un tiempo **t**, tal que **t**<**T**, con **T** = período del disco). Tome como referencia un **sistema coordenado fijo a la mesa** sobre la cual gira el disco. Puede ser de ayuda referirse a la línea trazada en el disco.

c.- Dibuje y escriba en notación vectorial el vector velocidad de la mosca referido a la mesa (como lo ve un observador fijo a la mesa). Utilice el principio de Superposición. ¿Esta velocidad se relaciona -de algún modo-, con los vectores posición calculados en el punto anterior?

d.- Dibuje (no se le pide calcular!) a mano alzada la trayectoria que describe la mosca vista por este observado en la mesa. Procure hacerlo desde el instante que parte desde el origen del disco hasta un instante menor que el período **T**.

e.- Si esta mosca al llegar al borde de la mesa, distraída, sigue caminando: Indique en qué dirección sale la mosca y cómo determina tal dirección. Puede dibujarla pero necesita explicar cómo estimó un cierto ángulo dibujado, si es que existe alguno...

(Refiera la dirección a un eje fijo a la mesa.)

37.– Un carro se mueve con velocidad uniforme $V_0 = 2$ m/s. El punto P se puede deslizar horizontalmente y está unido al borde de una rueda de radio $R = 3\ m$ por medio de una vara de largo $L = 5\ m$. Encuentre la velocidad del punto P en función de t si para $t = 0$ el punto Q está junto al suelo.

38.– Un objeto celeste situado a una gran distancia, emite una nube brillante de gas que viaja a la velocidad V, y formando un ángulo θ con nuestra línea visual (ver Figura).

a) Teniendo presente que la velocidad de la luz es finita e igual a c, demuestre que la velocidad *transversal aparente* que mide un observador en nuestro planeta es:

$$V_{\text{aparente}} = \frac{V \operatorname{sen}\theta}{1 - \dfrac{V\ \cos\,\theta}{c}}.$$

b) Demuestre que esta velocidad aparente puede ser mayor que la velocidad de la luz c.

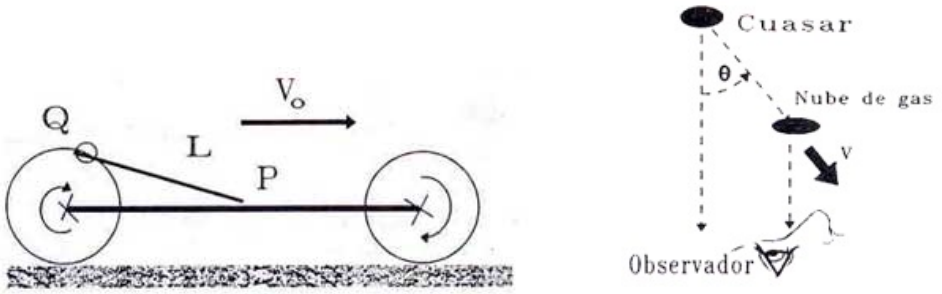


Figura V.44:

V.10. Problemas Resueltos

Ejemplo

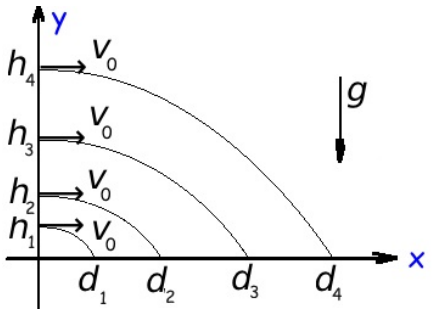
N partículas son ubicadas a diferentes alturas $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ ... $\mathbf{h}_N$, sobre el eje **y**, como se indica en la Figura. Cada una de ellas se lanza simultáneamente y con la misma velocidad horizontal $\mathbf{V}_o\hat{\imath}$. Debido a la aceleración de gravedad, cada una de ellas impacta al eje **x**, en las posiciones d_1, d_2 ...d_N.

a.- Encuentre las alturas h_i en función del índice **i** y los datos proporcionados para que las partículas impacten el eje **x** a una misma distancia **d** una de otra.

b.- Con qué retardo sería necesario lanzar cada una de las partículas para que todas ellas impactarán el eje **x** simultáneamente, conservando la misma distancia **d** establecida en la pregunta anterior.

Solución

Estrategia: Resolver la trayectoria de la primera partícula lanzada desde una altura, imponiendo que se ubique a una distancia **d** del origen. Repetir el proceso adaptándolo a cada una de las otras. Calcular el retraso con que deben lanzarse para resolver la parte b.- .



Datos: g, V_o y la separación **d** entre las esferas en el piso.
Incógnitas: h_n, la altura desde donde se lanza la partícula y la cronología del lanzamiento.

a.- La ecuación adaptada para la componente vertical de la primera partícula es: $y = h_1 - \frac{1}{2} g\, t^2$.

El tiempo que tarda en llegar al piso (y = 0) es entonces $t_1 \,=\, \sqrt{\dfrac{2\,h_1}{g}}$.

El desplazamiento horizontal está determinado por la ecuación

$$x_1 \,=\, V_o\,t_1 \;\Rightarrow\; d \,=\, V_0\,t_1 \,=\, \sqrt{\frac{2\,h_1}{g}\,V_0^2}. \quad \text{El valor de h}_1 \text{ es} \quad h_1 \,=\, \left[\frac{g\,d^2}{2\,V_0^2}\right]$$

Para la segunda partícula, la ecuación para el movimiento vertical se repite cambiando el subíndice 1 por 2. La distancia horizontal alcanzada al tocar el piso es

$$2\,d \,=\, V_o\,t_2 \,=\, \sqrt{\frac{2\,h_2\,V_0^2}{g}} \;\Rightarrow\; h_2 \,=\, 4\,\left[\frac{g\,d^2}{2\,V_0^2}\right].$$

No es difícil adivinar que para la pertícula 3, la altura será

$$h_3 \,=\, 9\,\left[\frac{g\,d^2}{2\,V_0^2}\right]. \;\Rightarrow\; h_n \,=\, n^2\,\left[\frac{g\,d^2}{2\,V_0^2}\right].$$

b.- Cada pelotita debe recorrer una distancia **d** adicional en la dirección horizontal comparada con la ubicada a la altura inmediatamente inferior. Por tanto

$$V_0\,\Delta T \,=\, d \;\Rightarrow\; \Delta T \,=\, \frac{d}{V_0}.$$

Por tanto, si la partícula 1 sale en t = 0, la siguiente partícula parte en (- T) segundos antes y así sucesivamente (- 2 T), (- 3 T)...(- n T) a medida que subimos en la altura.

□

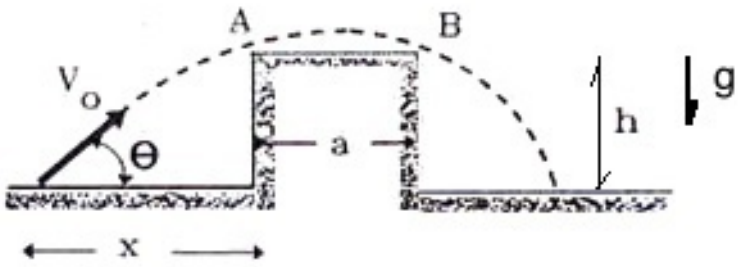
Ejemplo

Un proyectil se lanza con velocidad inicial $\mathbf{V}_0$ y ángulo de lanzamiento θ, ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de altura desconocida **h**, rozando sus dos vértices **A** y **B**.

a.- Dibuje, a mano alzada, la trayectoria que debe recorrer esta partícula. y determine si existe una simetría en esta trayectoria que le facilite la resolución del problema. Además , indique ¿Cuáles es la condición o las condiciones que se deben cumplir en los puntos **A** y **B** de la trayectoria?

b.- Calcular la distancia **x** que separa el punto de lanzamiento, de la pared más cercana del obstáculo.

b.- Calcular la altura **h** de la barrera.



Datos: $\mathbf{V}_0, \theta$, **g, a** y dos características de la parábola.

Incógnitas: **d, h,** $\mathbf{y}_0$ (ver significado de esta variable en la solución)

Estrategia: Explotar la simetría aparente del problema. A partir de ello, escribir las dos ecuaciones de la cinemática e imponer las restricciones del dibujo.

Solución

a.- El eje que pasa por el centro de la pared es un eje punto de simetría del problema, por tanto pongo el origen de coordenadas allí puesto que las ecuaciones serán más simples.

$$y = y_o - \frac{1}{2}\, g\, t^2\,, \qquad (\text{no conocemos } y_0) \qquad x = V_0 \cos\theta\, t.$$

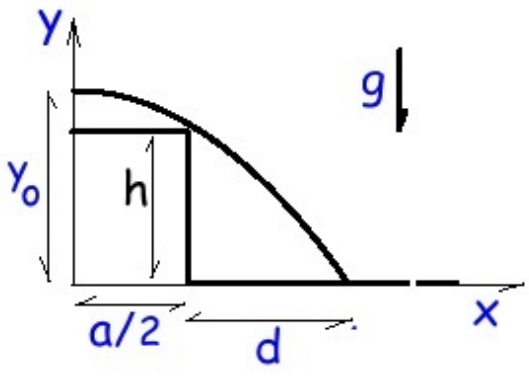
En t = 0, la partícula está sobre el origen de coordenadas y sobre la pared. Esta altura (mayor que **h** define y_o) .

Cuando la partícula alcanza el punto **P** , esto ocurre en el tiempo **T**, su altura es nula (y = 0), y el valor que adopta la coordenada **x**, de acuerdo a nuestra definición es x = (d + a/2). De este modo, tenemos

$$x = d + \frac{a}{2} \;=\; V_0\, \cos\theta\, T, \;\; (\text{donde no conocemos el valor de T y d}). \qquad \text{(V.66)}$$

La componente vertical en **P** toma el siguiente valor

$$y(T) \;=\; 0 \;=\; y_0 - \frac{1}{2}\, g\, T^2. \qquad \text{(V.67)}$$



Y finalmente, la componente vertical de la velocidad en **P**, se invirtió con respecto a la salida, debido a su caída, entonces

$$V_y(T) \;=\; -V_0\ \text{sen}\theta \;=\; -g\, T. \qquad \text{(V.68)}$$

La partícula fue enviada con $+V_o\, sen\theta$ en el sentido positivo y retorna con la misma velocidad pero en sentido opuesto.

Conocemos T de la ecuación V.68, y por tanto conocemos y_0

$$y_0 = \frac{1}{2}\, g\, T^2 = \frac{1}{2}\, g\, \left(\frac{V_o\, sen\theta}{g}\right)^2 \;=\; \frac{V_o^2 sen^2\theta}{2\, g}.$$

Comprobar que las dimensiones están correctas!

Si conocemos T de la ecuación (V.68), la ecuación (V.10) nos resuelve el valor de **d**

$$d \;=\; -\frac{a}{2} \;+\; V_0\, \cos\theta\, \frac{V_0\, sen\theta}{g} \;=\; \frac{V_0^2\, sen\theta\, \cos\theta}{g} \;-\; \frac{a}{2}.$$

Con estas ecuaciones y las condiciones iniciales establecidas podemos calcular el valor de **h** :

$$x = \frac{a}{2} = V_0 \cos\theta\, T_1 \;\; \text{por tanto} \;\; y(T_1) \;\equiv\; h = y_0 - \frac{1}{2} g\, T_1^2. \tag{V.69}$$

reemplazando los valores T_1 e y_0 tenemos

$$h \;=\; \frac{1}{2\, g}\, \left[V_o^2\, sen^2\theta \;-\; \left(\frac{a\, g}{2\, V_o\, \cos\theta}\right)\right]. \tag{V.70}$$

□

Capítulo VI

DINAMICA

VI.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos previos hemos descrito el movimiento de una partícula con la aceleración como dato. Dos casos hemos analizado: aceleración gravitacional constante y la aceleración centrípeta, asociada al movimiento circular uniforme. Dada la aceleración podemos describir la trayectoria de un cuerpo.

En este capítulo -siguiendo la propuesta de Newton-, determinaremos la aceleración de un objeto a partir de sus interacciones (por definir) con su vecindad. Estas interacciones son por ejemplo, el contacto entre dos cuerpos, la acción de una cuerda sobre un objeto, el roce entre dos superficies en movimiento relativo... las modelaremos mediante un vector, que llamaremos fuerza.

Este paso fue la culminación de los trabajos de Galileo, Kepler y Newton. Ellos establecieron que ni la posición $\vec{x}$, ni la velocidad $\vec{v}$ tenían una causa inmediata, el factor clave resultó ser la aceleración.

Este resultado fue difícil de aceptar porque gran parte de la información llega a través de la observación, a simple vista. El ojo es sensitivo a la velocidad pero a menudo ignora la aceleración, en consecuencia es difícil de aceptar que la velocidad no sea parte central de las leyes de movimiento [6].

Nuestro sentidos como el tacto y el equilibrio nos proporcionan la ayuda esencial que necesitamos para percibir la aceleración. Si el metro frena, debemos afirmarnos de una manilla para que (por contacto) aparezca una fuerza que nos mantenga fijos, en reposo relativo, con respecto al metro.

La aparición de las tres leyes de movimiento y la ley de gravitación universal, publicadas por

Isaac Newton, constituyó la culminación de una serie de logros alcanzados durante los siglos XVI y XVII. Entre ellos se destacan: las leyes de Kepler en el campo de la astronomía, las ideas de Galileo y su descripción del movimiento de los cuerpos, el progreso logrado por Descartes en geometría analítica, Huygens y su libro acerca de la luz, el perfeccionamiento del reloj de péndulo... Estos y muchos otros, hicieron del siglo XVI y XVII un período brillante en el desarrollo de la humanidad. Todo sucedió en el lapso de tiempo comprendido entre dos generaciones: la de Galileo y Newton. Este último nació el mismo año de la muerte de Galileo, en 1642.

VI.2. LEYES DE NEWTON, LA SINTESIS FINAL

La revolución que produjo la publicación de su libro "Principia" (1687) que contenía sus leyes más famosas, no puede ser considerada como la obra de un sólo hombre, sino el broche genial que coronó el esfuerzo de quienes lo precedieron.

Las leyes de Newton son el protocolo que nos indica cómo debemos operar para determinar la aceleración de un cuerpo.

PRIMERA LEY

> Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme, solamente si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él, se anulan entre sí.

Esta es la ley de **inercia**. Es la definición de un **sistema inercial**. Por ejemplo, si en un cierto sistema de referencia un objeto que inicialmente estaba en reposo permanece en reposo sin precisar alguna interacción extra, entonces este sistema constituye un sistema de referencia inercial.

Históricamente ésta fue una abierta confrontación con la física Aristotélica que postulaba que la *fuerza* (o acción ejercida por un agente externo) era proporcional a la velocidad. En muchos casos se oponía al sentido común: cualquier observador puede comprobar que para mantener un carro en movimiento con velocidad constante, necesita aplicar una fuerza constante. Galileo, como vimos, ya había dado el primer paso al atribuir a los cuerpos esta *modorra* que los hacía mantener su movimiento adquirido. Newton generalizó este principio e incluyó el movimiento circular. Esta afirmación contradecía a los filósofos antiguos y también a Galileo que pensaban que el movimiento circular –en particular el de los planetas-, era natural y no necesitaba la presencia de una fuerza (o mejor de un agente extraño) que cambiara constantemente su velocidad. Newton coincidía con Descartes en esta disputa, quien afirmaba que una partícula que describe un movimiento circular tiende a seguir por la tangente a la circunferencia en ese punto, si no es retenida en su órbita por una cuerda.

Podemos mencionar ejemplos. Si dejamos rodar una esfera de acero sobre un riel horizontal, esta esfera rueda por un largo trecho sin detenerse si el roce entre la esfera y el riel es despreciable. La esfera mantiene su movimiento horizontal porque no existe ninguna ínteracción (o fuerza) en dicha dirección.

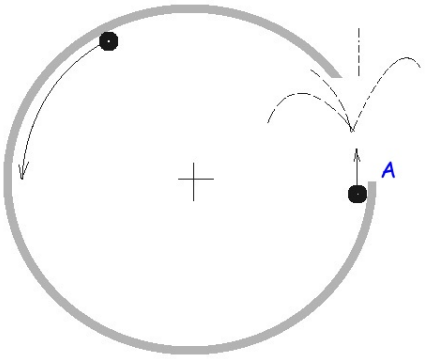
Si viajamos en un vehículo por un camino plano a velocidad constante, el movimiento no se percibe. Sin embargo, si el vehículo frena bruscamente, nuestra tendencia (inercia) es mantener el estado de movimiento inicial.

Ejemplo

El anillo (incompleto) permanece fijo sobre una superficie horizontal. Un pedazo de arco se ha extraído del anillo, como muestra la figura. Si una esfera se pone a rodar sobre el interior del anillo, indique cuál de las trayectorias indicadas seguirá la esfera una vez que alcance el punto **A** del anillo. ¿Depende esta trayectoria de la velocidad de la esfera?

Solución

Por el principio de inercia, cualquiera sea la velocidad la partícula seguirá la dirección y sentido de su velocidad en el punto **A**. Una trayectoria que sigue el contorno del anillo *después* de abandonar el punto **A**, era la creencia (errónea) que profesaban en la antigüedad y que extendían a la trayectoria (círculos) seguido por los planetas. Newton nos dice, como veremos a continuación, que la esferita sigue al anillo en su trayectoria debido a la interacción (fuerza) que ejercía el anillo sobre la esfera.



Lo usual es que la velocidad de los cuerpos cambie ya sea en su módulo solamente, o sólo en su dirección o en ambas.

La segunda ley de Newton, contiene la relación entre la suma de las fuerzas externas y la aceleración adquirida por el cuerpo. Originalmente fue escrita utilizando el *momentum*, que es el producto de la velocidad por la masa inercial de un cuerpo.

SEGUNDA LEY

El cambio de momentum es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, y apunta en la dirección y sentido de la línea generada por la fuerza neta.

$$\vec{F}\,\Delta t = \Delta\,\vec{P}.$$

La segunda ley establece en forma cuantitativa *cómo* cambia el movimiento debido a la aparición de la fuerza. Al enunciar su segunda ley, Newton dió especial importancia al concepto de *cantidad de movimiento* (momentum) $\vec{P}$

$$\vec{P} \equiv m \cdot \vec{v}_0 \tag{VI.1}$$

en esta fórmula el concepto de masa es aceptado en forma intuitiva.

Si la masa permanece constante, entonces:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m \cdot \vec{v}\,) = m\,\Delta\vec{v}.$$

Ahora podemos introducir la aceleración en la fórmula anterior,

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \equiv m \cdot \vec{a}. \tag{VI.2}$$

Vemos que si $\vec{F} = 0$, entonces $\Delta\vec{v} = 0$, es decir, no cambia ni la dirección ni la magnitud de la velocidad y el movimiento permanece rectilíneo.

Por otra parte si la fuerza es constante y la masa no varía, se origina un movimiento con aceleración constante. Un ejemplo, es la caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra.

La definición de *masa inercial* m, se hace a través de un experimento que es fácil describir y entender pero más difícil de realizar [1].

Por ahora aceptamos la masa inercial como un número real que asociamos con cualquier objeto y para el cual existe un procedimiento bien determinado que fija su valor sin ambigüedades.

Vemos que la expresión $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ incluye dos conceptos nuevos: fuerza y masa. Si aceptamos la definición de masa, entonces la segunda ley de Newton es una definición de fuerza, y viceversa. No hay forma de salir de este círculo vicioso puesto que tenemos una ecuación y dos conceptos nuevos.

Esta característica de las ecuaciones de Newton es común a todas las teorías realmente *nuevas*. No constituyen una extensión de los conceptos antiguos, sino más bien los conceptos antiguos *caben* y se ordenan dentro de este nuevo esquema. En este escenario se introducen conceptos nuevos –como la **fuerza**– y, simultáneamente se provee una receta consistente (vía leyes simples y universales) de cómo usarla en distintas circunstancias [3].

En este caso, la receta consiste en describir un procedimiento que defina la masa de un objeto en forma *única*: de una vez para siempre.

Con la masa ya definida y suponiendo que el objeto no sufre ningún cambio físico, tenemos el número que asociamos a m en las ecuaciones de Newton.

[1] *Un ensayo escrito por el Profesor Igor Saavedra acerca de las ideas y conceptos introducidos por Newton al anunciar sus leyes, se incluye en un Apéndice, al final del libro.*

En forma *independiente*, definimos la fuerza que incluiremos en cada caso. Por ejemplo, fuerzas de interacción gravitacional si hay un objeto masivo en la cercanía, fuerzas de contacto si hay objetos que se tocan, fuerzas de roce si hay deslizamiento relativo entre superficies...etc. y, con cualquiera de estas u otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, aplicamos la segunda ley de Newton. Enseguida verificamos si la aceleración *observada* coincide con el comportamiento obtenido a partir de la teoría. Si hay acuerdo entre la teoría y la observación, aceptamos esta ley de movimiento como verdadera. Si aparece una contradicción que no encuentre explicación dentro del esquema descrito, debemos revisar la teoría.

Newton dió una (y sólo una) prescripción clara, concreta y corta para determinar en forma única las fuerzas que intervienen en una situación dada y que es necesario utilizar para resolver cualquier problema propuesto.

Cada vez que olvidemos incluir una de las fuerzas que, de acuerdo a la prescripción, deba ser considerada, llegaremos a un resultado erróneo y, en ese caso, se nos podrá señalar *sin ambigüedades*, qué fuerza se nos olvidó incluir en el problema.

En resumen, lo impresionante en las leyes de Newton es su esquema simple y claro de funcionamiento, que es capaz de predecir acertadamente una gran cantidad de fenómenos observados en la vida diaria.

TERCERA LEY

> Si un cuerpo **A**, ejerce una fuerza sobre otro **B**, éste último ejerce sobre **A**, una fuerza igual en magnitud y dirección, pero en sentido opuesto. Estas fuerzas, denominadas de acción y reacción actúan siempre en puntos diferentes.

La tercera ley de Newton define una propiedad que deben tener todas las fuerzas. Las fuerzas de *acción* y *reacción* aparecen bien delineadas al existir dos objetos en contacto. Por ejemplo, esta prescripción indica que al tener dos bloques, A y B, y en el caso que uno, A, empuja al otro, B, se debe reemplazar A por una fuerza que actúa sobre B y, simultáneamente, una fuerza actuando sobre A, en la misma dirección que la anterior pero con sentido contrario.

También es válida para objetos que se influencian unos a otros por intermedio de una acción a distancia, es decir sin un medio material que los una.

Por ejemplo: al tirar un bloque mediante una cuerda se ejerce una fuerza (acción) F_0 sobre el bloque, en consecuencia –de acuerdo a la tercera ley de Newton– este objeto aplica sobre la mano una fuerza (reacción) cuya magnitud es la misma $|F_0|$, pero cuyo sentido es opuesto.

La utilidad de esta ley es transparente cuando analizamos sistemas complejos (con varios cuerpos interactuando entre ellos). En este caso debemos *cortar (imaginariamente)*, los vínculos que

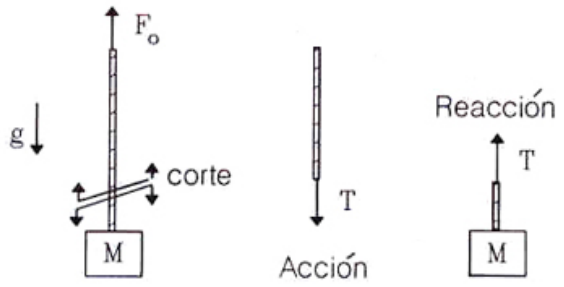


Figura VI.1: *La Tercera Ley de Newton en acción. F_o representa la fuerza que se aplica sobre el bloque a través de la cuerda. El tipo que sujeta la cuerda soporta una fuerza –F_o. Al cortar esta cuerda, en forma imaginaria, debemos reemplazar en cada extremo cortado la tensión* **T** *de acuerdo a esta ley.*

une cada uno de los cuerpos y reemplazarlo por su fuerza equivalente de acuerdo a la tercera ley de Newton.

VI.2.1. Unidades y Dimensiones

Si la masa se mide en kg y la aceleración en (m/s^2), entonces la fuerza viene dada en newtons. la dimensión de la fuerza es $[M][L][T^2]$.

$$1\,newton \equiv 1\,kg \times 1\,\frac{m}{(s)^2} \equiv 1N, \qquad \text{MKS} \qquad \text{(VI.3)}$$

$$1\,newton = 1000\,gr \times \frac{100\,cm}{(s)^2} = 10^5\,\frac{gr \times cm}{(s)^2} \equiv 10^5\,dinas \qquad \text{CGS.} \qquad \text{(VI.4)}$$

Es interesante notar que, a pesar de que Newton fue un ciudadano Británico, el concepto de fuerza, que constituyó sin duda, una gran contribución a la ciencia, se midió hasta hace poco en Gran Bretaña, en otras unidades denominadas Libras. Hoy este desorden en las unidades está llegando a su fin debido a la necesidad de los países de uniformar sus unidades de medida. El newton como unidad de fuerza es universal.

VI.3. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Los problemas de dinámica, por complejos que sean, son una superposición de problemas simples. A continuación, ilustraremos cómo enfrentar una serie de problemas simples.

Lo primero es aislar el cuerpo que nos interesa y reemplazar el resto de los objetos que interactúan con él mediante una fuerza. Esto es hacer **diagrama de cuerpo libre** o abreviado **DCL** del objeto en estudio.

Analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es equivalente a aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Cada objeto que interactúa con este cuerpo es borrado y reemplazado por una fuerza de acuerdo con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es un cuerpo aislado (libre) sobre el cual actúan diversas fuerzas. Es lo que se denomina un DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE del objeto: **DCL** .

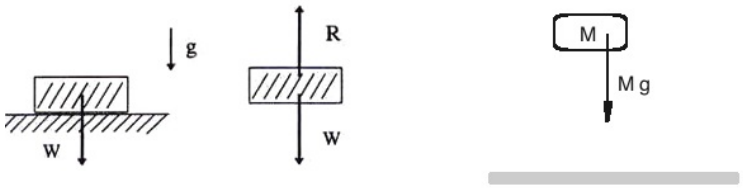


Figura VI.2: *Dos caso se ilustran en esta Figura. Una masa en reposo sostenida por un piso plano y un objeto en caída libre, sobre el cual también se aplica la atracción gravitacional de la Tierra, pero a diferencia del anterior no existe una reacción del piso porque NO hay un piso que lo sostenga. Este objeto cae libremente.*

Ejemplo

Analizar las fuerzas que actúan sobre un bloque que permanece en reposo sobre el piso.

Comenzaremos definiendo una de las fuerzas que debemos incluir en la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\,\vec{a}$, cuando estudiemos el movimiento de un objeto situado sobre la Tierra. Esta fuerza es el *peso*:

A cada objeto, le asignamos una fuerza, que definimos como: $\vec{W} = M \cdot \vec{g}$, y que apunta hacia el centro de la Tierra. Posteriormente analizaremos su origen, por ahora la aceptamos como una propiedad de cada objeto. Esta fuerza es, por definición:

$$\vec{W} = -Mg\,\hat{\jmath}, \qquad\qquad W \equiv \text{ peso del objeto.}$$

Como el bloque se apoya sobre el piso, al retirar el piso para hacer el diagrama de cuerpo libre, lo debemos reemplazar por una fuerza, que llamamos la *reacción* del piso $\vec{R}$. Estas, $\vec{R}$ y $\vec{W}$ son todas las fuerzas que actúan sobre el bloque.

Como además nos dicen que el bloque permanece en reposo en la dirección vertical entonces $v_y = 0$, en todo instante y por lo tanto $a_y = 0$, y, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas externas en esa dirección debe anularse. De esta forma la fuerza que ejerce el piso *sobre* el bloque debe ser *igual en magnitud y de sentido opuesto* al peso del bloque. Tomando

como vector unitario $\hat{\jmath}$ en la dirección vertical y, sumamos todos los vectores en dicha dirección y obtenemos:

$$(+R - W)\hat{\jmath} = M(\vec{a} \cdot \hat{\jmath}) \equiv Ma_y = 0 \Rightarrow R = W.$$

En la dirección horizontal, no existen fuerzas ni aceleraciones.

Nota

• R representa el módulo del vector $\vec{R}$, y análogamente, W es el módulo del vector $\vec{W}$, son por lo tanto **positivos**. Si al resolver las ecuaciones uno de ellos resulta ser negativo, nos indica que el sentido asignado inicialmente a dicho vector, no corresponde con el sentido que tiene dicha fuerza.

Las ecuaciones, si son aplicadas consistentemente, proporcionan el sentido correcto de los vectores.

• En la segunda ley $\vec{F} = m\vec{a}$, la fuerza $\vec{F}$ denota la suma de **todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo**. Así, en rigor debemos escribir la segunda ley como:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Si el cuerpo no sufre ninguna aceleración, $(\vec{a} = 0)$ y $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$.

Esta ecuación define la *estática* de objetos puntuales.

Ejemplo

Un objeto de masa M cuelga desde el techo mediante una cuerda, que suponemos sin masa. (Es decir la masa de la cuerda es despreciable al compararla con la masa del bloque). Encontrar la tensión en la cuerda.

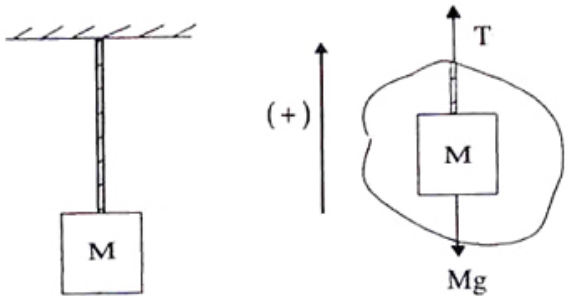


Figura VI.3:

Para calcular la tensión, cortamos la cuerda y hacemos el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte inferior del dibujo.

Como este elemento permanece en reposo absoluto, la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él, debe ser cero. Además, como lo hemos aislado del resto del medio (de la parte superior de la cuerda, de la atracción de la Tierra) debemos reemplazar cada uno de ellos por la interacción (**fuerza**) con que actuaba sobre nuestro sistema. Las denominamos T y $W = M\,g$.

Haciendo una elección juiciosa de las coordenadas (ver Figura) tenemos:

$$+T - Mg = Ma = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = Mg.$$

Las cuerdas que usaremos en nuestros problemas se refieren a objetos que sólo tienen longitud (largo), son inextensibles y transmiten solo tensiones en sus extremos en la dirección de la cuerda. Claramente una cuerda NO puede transmitir compresiones. Como la masa de la cuerda es nula, el módulo de la tensión en ambos extremos es el mismo. Más tarde estudiaremos resortes cuyo modelo serái idéntico a éste de la cuerda apero permitiremos que su largo sea variable y transmita compresiones.

Ejemplo

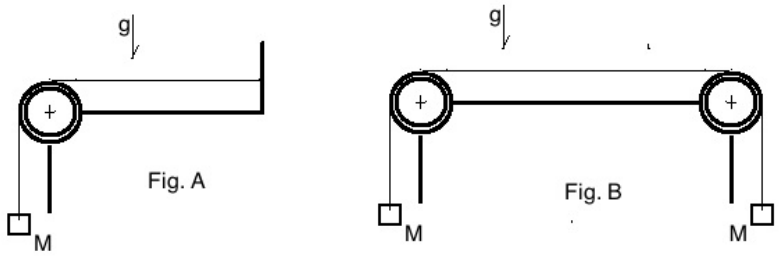
Considere la masa **M** sostenida de dos formas diferentes. En el primer caso (Fig- A) se sostiene mediante una cuerda que está unida a una pared. En el segundo caso (Fig- B) se sostiene mediante otra masa idéntica colgando en forma simétrica desde el lado opuesto. No existe roce en ninguna de las superficies en contacto.

La tensión en la cuerda es

a.- mayor en el caso **A** que en el caso **B**.

b.- Es mayor en el caso **B** que en **A**.

c.- Es igual en ambos casos. Dé una razón cuantitativa que justifique su decisión.



El DCL de la masa en el extremo izquierdo es el mismo en ambos casos. Similar al del ejemplo anterior. La polea ideal del extremo no tiene masa ni roce. Su papel es sólo desviar en 90^o la dirección de la tensión de la cuerda. Al igual que el caso anterior la tensión es igual al peso de la masa T = M g.

Ejercicio

Dos cuerdas de largo diferente y sin masa, se sostienen desde una superficie plana y horizontal. El otro extremo de la cuerda está atada a un gancho instalado en la masa **M**. Calcular la tensión sobre cada una de las cuerdas AB y BC de la Figura VI.4.

Nota

Este es un problema en dos dimensiones. Como la segunda ley de Newton es vectorial debe usarla separadamente en cada una de las dos direcciones. En este caso Ud. no conoce la magnitud de ninguna de las dos reacciones en la cuerda, pero sí conoce su dirección y sentido; su dirección es la misma que adoptan las cuerdas y el sentido de la fuerza debe ser tal que mantenga la cuerda tensa.

Respuesta: $T_C = T_A \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad T_A = \dfrac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}\, M\, g$ Note que al ser las cuerdas diferentes la tensión en cada una es diferente. Si fuera una sola cuerda que atravesara el ganchopara sostener a **M**, la tensión debería ser la misma, una sola para toda la cuerda.

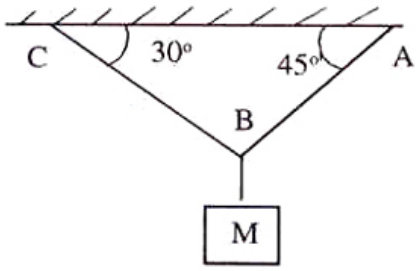


Figura VI.4:

Considere el sistema de dos masas **m** y **M** unidas por una cuerda sin masa e inextensible, con todas las superficies en contacto con roce despreciable. Inicialmente el sistema se mantiene en reposo sosteniendo la masa **m** mediante un agente externo (con una mano, por ejemplo). Posteriormente se deja ir y el sistema comienza a deslizar. Compare el valor de la tensión en la cuerda para ambos casos, cuando estaba sostenida y al liberarla. Justifique su respuesta.

En el primer caso, donde la masa **m** está inmovilizada basta que calculemos la tensión en la masa que está colgando del otro extremo de la cuerda (Ver recuadro **A** en la figura VI.5), dado que la tensión se transmite sin cambiar de magnitud a lo largo de la cuerda. En este caso entonces la tensión es T = M g.

Cuando el sistema se deja libre, la masa **M** comienza a caer. Como la cuerda es inextensible, lo que baja la masa **M** es seguido en la misma forma por la masa **m**. Ambas tienen por tanto el mis-

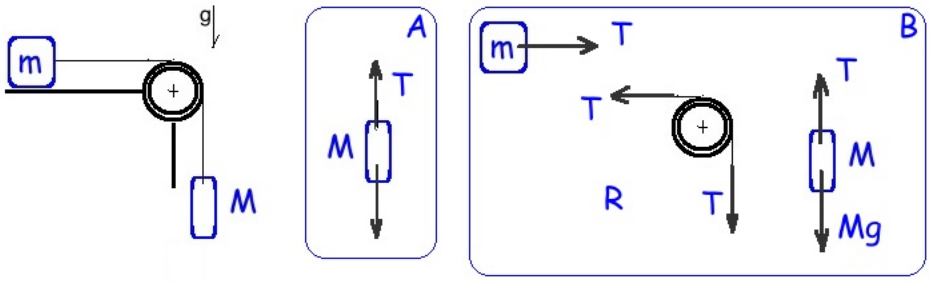


Figura VI.5: *La fuerza* **R** *indicada en la figura* **B** *representa la reacción en el eje de la polea (supuesta sin masa o cuya masa es despreciable con respecto a la tensión que actúa en la cuerda). Si las tensiones son perpendiculares entre sí, la reacción apunta en 45º.*

mo desplazamiento por unidad de tiempo, la misma velocidad y la misma aceleración. Debemos resolver el problema de dos masas unidas por una cuerda, que se mantiene tensa durante la caída. Este es el planteamiento del problema. Ahora insertamos el protocolo de Newton para resolverlo. Los diagramas de cuerpo libre están en el recuadro **B** de la figura VI.5. Elegimos como positivo el sentido que sigue la caída de la masa **M** y lo consideramos a lo largo de la cuerda. Las ecuaciones que se desprenden del DCL son

$1.-\ T = m\,a, \qquad 2.-\ Mg - T = M\,a.$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$a = \frac{M}{m+M}\,g. \qquad \text{Por tanto la tensión en el caso B es} \qquad T = \frac{m\,M}{m+M}\,g. \qquad \text{(VI.5)}$$

La tensión es menor en el caso en que las masa **M** está cayendo y arrastra a **m**. Era de esperar una respuesta así debido que al caer la masa **M** la tensión debe disminuir necesariamente para que el sistema adquiera aceleración.

Ejercicio

Dos masas, **M** y **m**, son aceleradas sobre una superficie (sin roce) mediante una fuerza aplicada en el extremo de la cuerda situada a la derecha de la masa **m**. Se pide comparar las magnitud de las tensiones soportadas por la cuerda **A** y **B**. Para ello decida si:

a.- De acuerdo a la Fig. la tensión en la cuerda **A** es mayor que la tensión que soporta la cuerda **B**.

b.- O el opuesto, la tensión en **B** es mayor que la de **A** .

c.- Las tensiones en ambas cuerdas son iguales.

Debe justificar su elección con argumentos físicos.

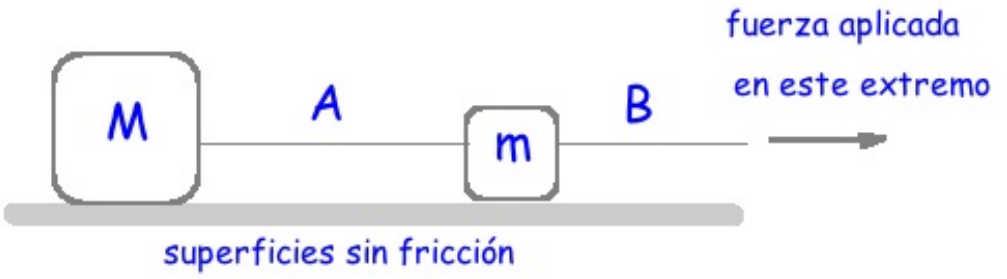


Figura VI.6:

La resolución de este problema es semejante al tratamiento del ejemplo anterior. La fuerza $\mathbf{F}_o$ de este caso, corresponde al peso de la masa **M**, Mg, en el caso anterior. No existe la polea. Pruebe reemplazando $\mathbf{M}\,\mathbf{g}$ por $\mathbf{F}_o$ en ec. VI.5

VI.4. SISTEMAS INERCIALES

Existe otra condición adicional para que las Leyes de Newton sean aplicables en la forma enunciada. El sistema de referencia usado debe permanecer en reposo absoluto o con una velocidad constante con respecto a otro sistema que permanece en reposo absoluto.

Ilustremos esta afirmación con un ejemplo.

Si se deja caer una pedazo de plasticina en el interior del Metro cuando está detenido, la plasticina cae verticalmente hacia el suelo. Ahora si lo hacemos cuando el Metro está acelerando (en el momento de partir, por ejemplo) podemos verificar que la plasticina *no* cae en el mismo punto que en el caso anterior, verticalmente bajo el punto de lanzamiento, sino que se desvía con respecto al observador. En los dos casos el objeto fue lanzado bajo las mismas condiciones, y una vez en el aire está sujeto a la misma fuerza, la atracción gravitacional (despreciamos la resistencia del aire). Sin embargo, la diferencia está que *en el segundo caso, el Metro no constituye un sistema de referencia inercial, por estar acelerado,* y por lo tanto no podemos aplicar las Leyes de Newton en la forma usual; aparecen fuerzas no inerciales, que deben ser incluidas para poder predecir correctamente las trayectorias observadas.

Resumiendo: Las Leyes de Newton son válidas cuando están referidas a un *Sistema Inercial*, uno en el cual un objeto en reposo, permanece en reposo o que se desplaza con una velocidad constante con respecto al sistema de referencia [2].

No existe en la naturaleza un sistema que cumpla con las condiciones de ser inercial. Sin embargo, existe una multitud de sistemas que denominamos inerciales puesto que su desviación con respecto a uno inercial es despreciable y por tanto se consideran genuinamente inerciales.

[2] En la actualidad, el único sistema que cumple esta condición es uno desde el cual se observa la radiación de fondo sin ninguna anisotropía. Ver esta idea en un libro de Cosmología.

La pregunta obvia en este punto es con qué objeto enunciamos las leyes de Newton si no existe el sistema de referencia donde podamos aplicarlas.

Esta no es realmente una dificultad. Se resuelve en forma pragmática:

> En todos los ejemplos que estudiemos, siempre existirá un sistema de referencia en el cual, los efectos de origen no-inercial del sistema de referencia son tan pequeños, que no los consideramos, salvo que explícitamente se indique.

Ejemplo

El sistema de referencia más usado es la superficie de la Tierra, que no constituye en rigor un sistema inercial puesto que está girando con respecto a un eje. Sabemos que al girar existe un aceleración y por lo tanto deben aparecer efectos de las fuerzas no inerciales en este sistema.

Si estudiamos el movimiento de partículas en un plano inclinado o el movimiento de un par de masas unidas mediante una cuerda que cruza una polea y en todas ellas la superficie de la Tierra es un buen sistema de referencia. Los efectos de la rotación son despreciables.

En caso que sea necesario incluir la rotación de la Tierra en algún ejemplo, ubicamos nuestro sistema de referencia que no gira en el centro de la Tierra. En este ejemplo estamos despreciando el movimiento de rotación de la Tierra en torno al Sol. Pero este inconveniente puede resolverse ubicándonos en el centro del sistema solar...y así sucesivamente.

Existen algunos fenómenos, que se originan debido a la naturaleza no–inercial de la Tierra y que en ciertas circunstancias se pueden apreciar. Indicamos un par de ellos.

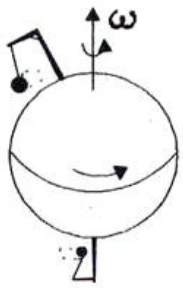


Figura VI.7:

• Si hacemos oscilar un péndulo justo en el Polo Sur –o mejor, justo en el eje de rotación de la Tierra–, no es difícil imaginar que al cabo de 24 horas, nuestro observador habrá dado una vuelta completa en torno a su eje. La *dirección de oscilación del péndulo* habrá permanecido, durante todo este tiempo, fija con respecto a las estrellas. La explicación para la rotación de este péndulo que gira sin razón aparente según el observador, se debe a que el péndulo, al estar sostenido por

un hilo, no está obligado a seguir a la rotación de la Tierra, y por tanto oscila conforme a las leyes de Newton pero referidas a un sistema de referencia fijo al centro de la Tierra, con respecto a las estrellas– y que, obviamente, no gira con la Tierra.

Algo similar sucede con un péndulo que oscila en Santiago (o cualquier otro lugar). El péndulo oscila y a la vez comienza a rotar, más lentamente esta vez, con respecto a su eje.

Este es el péndulo de Foucault que se exhibe en algunos Museos de Ciencia y Tecnología.

• Todos sabemos que es muy peligroso caminar sobre un disco que está girando. Es muy difícil saber qué debemos hacer para equilibrarnos. Sin embargo la Tierra está girando y nosotros no perdemos el equilibrio. La explicación radica en la pequeña magnitud que tiene la velocidad angular de la Tierra. Consecuentemente, sus efectos son difíciles de captar.

• Otros fenómenos similares ocurren con las corrientes oceánicas, las direcciones de los vientos en las vecindades de la zona tropical, el movimiento de los glaciares que se desvían con respecto a las corrientes oceánicas que los ponen en movimiento ...etc.

Todos estos fenómenos se originan cada vez que existe un movimiento sobre un sistema de referencia que está en rotación. La aceleración que se genera se denomina la aceleración de Coriolis y tiene la expresión siguiente:

$$|\vec{a}_{\text{coriolis}}| = 2\, v_{relativa} \cdot \omega_{\text{ Tierra}}.$$

En consecuencia, cuando dejamos caer un objeto sobre la Tierra éste no cae verticalmente, sino que desvía su trayectoria debido a la aceleración de Coriolis. Afortunadamente este efecto es muy pequeño. Podemos **estimar** el valor máximo de la aceleración de Coriolis para un objeto que se deja caer desde una altura de 10 metros.

Sabemos que la desviación es pequeña, así que podemos considerar la velocidad relativa a la Tierra como la velocidad de caída libre. Esta es de aproximadamente 14 m/seg (cuando llega al suelo), si es lanzada desde una altura de 10 metros. Por otra parte, la velocidad angular de la Tierra es aproximadamente $0{,}7\times10^{-4}$ rad/seg, de esta forma el valor máximo de la aceleración de Coriolis es aproximadamente de 10^{-3} m/seg^2. Si comparamos este número con el valor de la aceleración de gravedad, 10 m/s^2, se percata que existen 4 órdenes de magnitud de diferencia entre ellas y que se necesita bastante más precisión que la habitual para detectar este efecto.

Ejercicio

Obtenga el valor de la velocidad angular de la Tierra. Encuentre el valor de la velocidad tangencial de un habitante de Antofagasta, de Puerto Montt y de Santiago.

VI.5. APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Proseguimos resolviendo ejemplos con aplicaciones de las leyes de dinámica. En todos consideramos la Tierra como un sistema inercial.

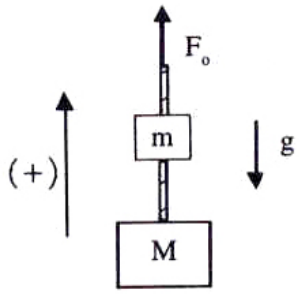
Ejemplo

Dos bloques m y M, están atados por una cuerda. El bloque superior m está sostenido verticalmente por otra cuerda a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}_0$. Los bloques están sometidos a la atracción gravitacional de la Tierra.

a) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para mantener ambos bloques en reposo? (Suponga ambas cuerdas sin masa).

b) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para comunicar a ambas masas una aceleración $\vec{a}_0$?

c) Suponga ahora que la cuerda que une ambas masas tiene, a su vez, una masa μ. ¿Cuál es la tensión de la cuerda que las une?



a) Definimos como positivo el sentido opuesto a la aceleración de gravedad $\vec{g}$. Si consideramos como nuestro sistema el conjunto de las dos masas, entonces en el diagrama de cuerpo libre, la suma de las fuerzas externas es F_0 y el peso de cada una de las masas:

$$\sum F_{ext} = F_0 - (M+m)g,$$

Incluyendo el término de la aceleración en la ecuación anterior, tenemos:

$$F_0 - (M+m)g = (M+m) \cdot a_0,$$

donde hemos supuesto que las masas son *aditivas*: si existen varias masas, la masa total es la *suma* de ellas.

No existe ninguna razón, para que esta suposición sea válida, pero los resultados que genera se ajustan a lo que se observa.

Si exigimos que $a_0 = 0 = v_0$, vale decir, que el sistema se encuentre en reposo, entonces:

$$F_0 = (M+m)\, g.$$

b) Si $a_0 \neq 0$, entonces $F_0 = (M+m)(g+a_0)$.

Ahora podemos dar a a_0 diferentes valores: si $a_0 < 0$, indica que la aceleración está apuntando en el mismo sentido que g, ahora si su módulo es igual a g, entonces $a_0 = -g$ y $F_0 = 0$. Este caso indica que el objeto está en caída libre y, obviamente, no se necesita aplicar ninguna fuerza sobre el cuerpo para lograr este resultado.

c) Calculemos la tensión en la cuerda que une las masas. En este caso tomemos como nuestro sistema, la masa M.

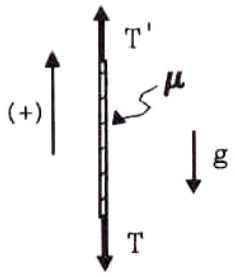
$F_{ext} \equiv T - Mg = Ma_0$ (Recordemos que T indica el módulo de la tensión $\vec{T}$ donde ya hemos incluido el signo correspondiente, lo mismo es válido para el peso de la masa M). Ordenando tenemos $T = M(a_0 + g)$.

El diagrama de cuerpo libre de la cuerda aparece en la Figura. Las fuerzas que actúan sobre ella son:

$$F_{ext} \equiv T' - T - \mu g = \mu a_0,$$

donde a_0 es la aceleración dada. Despejando, $T' = T + \mu(a_0 + g)$. Reemplazando el valor de T indicado más arriba obtenemos:

$$T' = (M + \mu)(a_0 + g)$$



Vemos nuevamente que si $a_0 = -g$ (caída libre), la tensión T' sobre el extremo superior de la cuerda es nula, como era de esperar, puesto que si el cuerpo está en caída libre, nadie sostiene la masa m.

Si $\mu = 0$, entonces $T' = T$: el módulo de la tensión en ambos extremos de la cuerda es la misma.

De la ecuación obtenida para T', se desprende que si $M \gg \mu$, podemos despreciar el efecto de la masa de la cuerda μ en la dinámica del sistema.

Si la masa de la cuerda es despreciable comparada con el resto de las masas que intervienen en el sistema en estudio, podemos suponer que la tensión es la misma en ambos extremos de la cuerda $T' = T$. Esta es una aproximación usada frecuentemente.

Podemos volver a este mismo ejercicio y analizarlo desde un punto de vista diferente. Al considerar como nuestro sistema las dos masas (unidas por una cuerda ideal, sin masa) entonces las fuerzas *externas* que actuaban sobre el sistema eran $\vec{F}_{ext} = +\vec{F}_0 - m\,\vec{g} - M\,\vec{g}$.

Ahora, si tomamos como nuestro sistema la masa M, entonces el diagrama de cuerpo libre nos muestra las fuerzas externas del sistema: $\vec{F}_{ext} = \vec{T} - M\,\vec{g}$. La pregunta que surge es: ¿por qué se dejó fuera la fuerza $\vec{T}$ (tensión en la cuerda) cuando se consideró cómo nuestro sistema el conjunto de las dos masas?

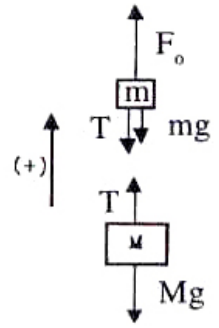
La respuesta es la siguiente: como consecuencia de la tercera ley de Newton *todas las fuerzas internas del sistema escogido se anulan mutuamente*, sólo sobreviven las fuerzas *externas* al sistema.

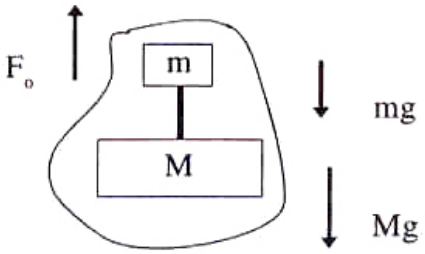
En el diagrama de Fuerzas que se acompaña intentamos explicar gráficamente este resultado. Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de cada una de las masas m y M separadamente (no incluimos la masa de la cuerda) y sumamos todas las fuerzas que actúan sobre ambas masas. Por el principio de acción y reacción las tensiones T se anulan entre ellas y sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.

$$\left.\begin{array}{rl} & \text{Sistema m.} \\ F_{ext.}^{\ m} = & F_0 - mg - T, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} & \text{Sistema M.} \\ F_{ext.}^{\ M} = & T - M\,g, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} & \text{Sistema } \{\text{m + M}\} \\ F_{ext.}^{\ m+M} = & F_{ext.}^{\ m} + F_{ext.}^{\ M}. \\ F_{ext.}^{\ m+M} = & F_0 - m\,g - M\,g \end{array}\right\}$$





□

Ejemplo

Tres bloques idénticos de masa M son empujados por una fuerza horizontal F_0 sobre una mesa sin fricción.

a) ¿Cuál es la fuerza *neta* vertical sobre el bloque A?

b) ¿Cuál es la fuerza *neta* horizontal sobre el bloque A?

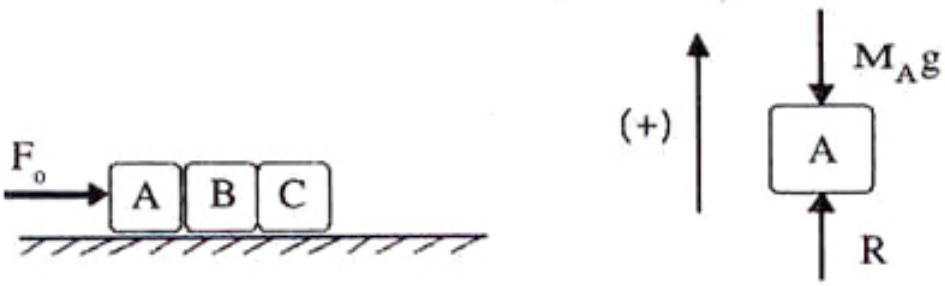
c) ¿Cuál es la aceleración del bloque C?

d) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el bloque B sobre el bloque A?

a) Fuerza vertical *neta* sobre A.

Como siempre, debemos comenzar con el diagrama de cuerpo libre de A. Reemplazo el piso por una fuerza que llamamos $\vec{R}$ (Reacción del piso). Debemos incluir el peso de la masa A. Como el

bloque A se desliza sobre la mesa sin saltos, tenemos que la *velocidad* de A en la dirección *vertical* es nula. Como su velocidad vertical no cambia, su aceleración en esa dirección es nula.



Usando la segunda Ley de Newton obtenemos:

$$F_y = R - M_A g = 0 \Rightarrow R = M_A g.$$

La reacción del piso es igual al peso del cuerpo.

b) Para calcular la fuerza horizontal que actúa sobre A debemos aislarlo: sacar el bloque B. Para que las leyes de Newton se enteren de la existencia de B, debemos incluir una fuerza que lo reemplace: $\vec{F}_{BA}$ (acción de B sobre A, una fuerza de contacto). Como no existe fricción, los 3 bloques se desplazan hacia la derecha con una cierta aceleración a_0 (que *no* conocemos por el momento).

A partir de la segunda ley de Newton obtenemos:

$$\overbrace{\underbrace{F_0 - F_{BA}}}^{\text{Fuerza neta sobre el bloque A}} = M_A \cdot a_0$$

c) Aceleración del bloque C.

Como todos los bloques viajan juntos, la aceleración de C es la misma que la aceleración del conjunto. El sistema elegido para hacer el diagrama de cuerpo libre en este caso es el conjunto de los tres cuerpos, de modo que:

$F_{ext} = F_0$ (sólo consideramos la dirección x).

$$F_0 = [M_A + M_B + M_C] \cdot a_0.$$

Si todas las masas resultan ser iguales, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{3}\left[\frac{F_0}{M}\right].$$

d) Ahora estamos en condiciones de calcular el valor de F_{BA}. Usando el resultado de la parte b) tenemos:

$$F_0 - F_{BA} = M\, a_0 = M\left[\frac{1}{3}\frac{F_0}{M}\right],$$

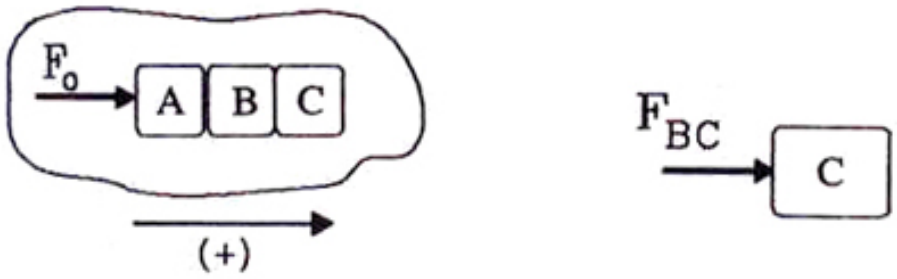


Figura VI.8:

despejando F_{BA}:

$$F_{BA} = \frac{2}{3} F_0,$$

y análogamente, la reacción de A sobre B es $F_{AB} = -F_{BA}$ de acuerdo al principio de acción y reacción, de modo que $F_{AB} = -\frac{2}{3}F_0$.

Para calcular la reacción de B sobre A, debemos hacer el diagrama de cuerpo libre de B y escribir la ecuación de fuerzas correspondiente:

$$F_{AB} - F_{CB} = M\, a_0,$$

como ya conocemos F_{AB} y a_0, obtenemos F_{CB} y entonces la fuerza del bloque B sobre C es:

$$F_{BC} = \frac{1}{3} F_0.$$

Es interesante notar que la intensidad de la fuerza neta, horizontal, que actúa sobre cada una de las masas es la misma. Por ejemplo, la fuerza sobre C es $\frac{1}{3}\, F_o$, sobre B es $-\frac{1}{3}\, F_o + \frac{2}{3}\, F_o = \frac{1}{3}\, F_o$, y sobre A es $F_o - F_{\mathrm{B}A} = F_o - \frac{2}{3}\, F_o = \frac{1}{3}\, F_o$.

Este resultado es natural, puesto que si todas las masas son iguales y tienen la misma aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza neta actuando sobre cada una de ellas debe ser la misma.

También es posible ver que la masa A está más comprimida que el resto: como es fácil de intuir.

Ejemplo

La figura representa una polea ideal (sin roce) sobre la que cuelgan dos masas M_1 y M_2, unidas por una cuerda sin masa e inextensible.

Encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema bajo la acción de la fuerza de gravedad.

De acuerdo a las suposiciones establecidas en el enunciado, la polea no gira y la cuerda se desliza sobre ella sin arrastrarla debido a la ausencia de roce.

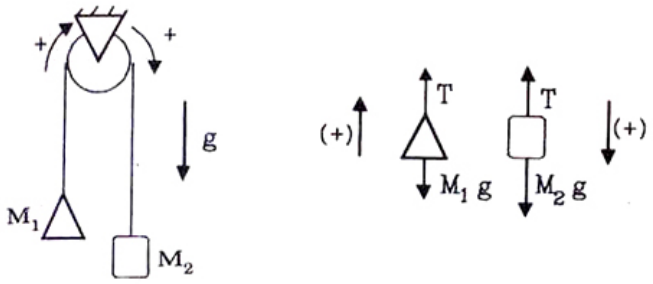


Figura VI.9:

Es claro que el sistema va a girar, salvo que las masas sean iguales. Una forma conveniente de resolver este caso es asignando, desde un comienzo, un valor positivo a una determinada rotación del sistema. Cuando se resuelve este problema a través de las ecuaciones de Newton, esta forma de asignar las coordenadas resulta simple y directa.

El diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas se indica en la Figura. *Note que mantenemos el sentido positivo a lo largo de la cuerda.*

Al cortar la cuerda la reemplazamos por una tensión que se transmite con igual magnitud al otro extremo puesto que la cuerda no tiene masa. La polea sólo cambia el sentido de la tensión. Las ecuaciones son:

$$T - M_1\, g = \quad M_1\, a,$$

$$-T + M_2\, g = \quad M_2\, a.$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas T y a, por lo tanto podemos resolver el problema. Al sumar ambas ecuaciones la tensión T desaparece y obtenemos la aceleración a. Reemplazando el valor de la aceleración en cualquiera de las ecuaciones obtenemos T.

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \cdot g, \qquad T = \frac{2\, M_2\, M_1}{M_1 + M_2} \cdot g. \tag{VI.6}$$

Vemos que si $\mathrm{M}_2 = M_1$, la aceleración es nula como debe ser. Si $\mathrm{M}_2 = 0$, la aceleración de M_1 es – g, de acuerdo a la convención de signos usada, y la tensión de la cuerda es nula, como era predecible.

Otro caso límite interesante es $M_2 \to \infty$. Demuestre que bajo estas condiciones la aceleración del sistema es g y la tensión alcanza el valor $T = 2\, M_1\, g$. Dé una razón física para justificar estos resultados.

Ejemplo

La masa M_3 en el sistema que se indica en la Figura [VI.10] representa la masa del tramo de la cuerda que se extiende entre las dos poleas ideales. Si despreciamos los trozos de cuerda que cuelgan de ambos lados, entonces podemos pensar en este problema como un intento de estudiar el efecto de la masa de la cuerda en el movimiento del sistema.

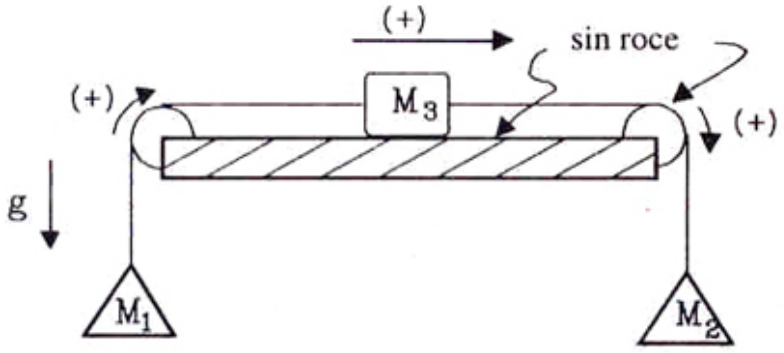


Figura VI.10: Este problema incorpora la masa de la cuerda –a través de M_3– a la dinámica de las masas del ejemplo anterior. Hemos reemplazado la cuerda por una masa puntual para evitar el análisis de la variación de masa debido al movimiento de la cuerda en los costados.

Las siguientes son cantidades conocidas que intervienen en el problema: M_1, M_2, M_3 y g. A partir de estos datos y de la información de la Figura se pide encontrar:

a) ¿Cuál es la fuerza neta sobre M_1 y M_2? Dé sus respuestas en función de M_1, M_2, g, T_1 y T_2 .

b) Si se mantiene fija la masa M_3 mediante una fuerza horizontal externa, por ejemplo con la mano, ¿cuál sería, en este caso, el valor de T_1?

c) Ahora suponga que M_1 se mantiene fijo aplicando una fuerza vertical con la mano, ¿cuál sería el valor de T_1?

d) ¿Cuál es la aceleración del sistema si se deja mover libremente? Dé sus respuestas en función de las masas $M_1,\ M_2,\ M_3,$ y g.

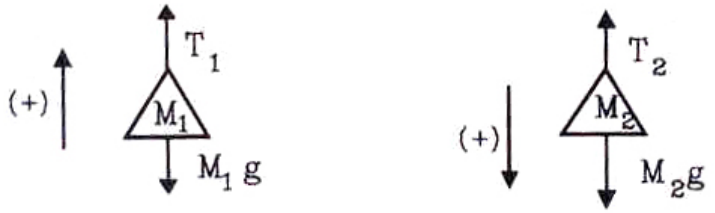


Figura VI.11:

La convención de signos para este ejemplo está indicada en la Figura.

a) Del diagrama de cuerpo libre de la masa M_1 se obtiene:

$$T_1 - M_1\, g = M_1\, a_1.$$

La fuerza neta sobre M_2 es:

$$-T_2 + M_2\, g = M_2\, a_2$$

Nota

Tomamos a_1 y a_2 como positivos. Si esto no resulta ser correcto, las ecuaciones nos lo indicarán.

Como la cuerda es inextensible, ambas aceleraciones deben ser iguales $a_1 \equiv a \equiv a_2$.

La fuerza neta sobre la masa M_3 es: $F_{ext}|_y = N_3 - M_3\, g = 0$, (no existe aceleración en la dirección del eje y, puesto que el bloque no salta ni tampoco se hunde durante su desplazamiento sobre la mesa).

$$F_{ext}|_x = -T_3 + T_4.$$

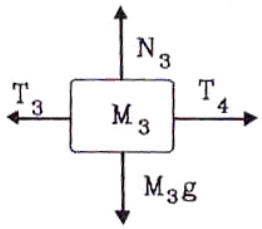


Figura VI.12: Diagrama de cuerpo libre de la masa que representa a la cuerda. Como no existe movimiento en la dirección vertical, la componente de la aceleración en esa dirección es nula.

b) Calculemos los valores de T_3 y T_4.

Como la masa de la cuerda es nula $|\vec{T_1}| = |\vec{T_3}|$, (Figura [VI.13]). La polea sólo cambia la dirección de la fuerza y no su *magnitud*. En cada punto de contacto de la cuerda con la polea se ejerce una fuerza (sobre la cuerda) perpendicular a la superficie de la polea. La suma de todas esas fuerzas da como resultado una fuerza neta R, que es ejercida por la mesa y que cancela exactamente la suma de las dos tensiones T_1 y T_3.

La suma de todas las fuerzas actuando sobre la polea, incluyendo a las tensiones, se debe cancelar exactamente puesto que la polea no rota ni tampoco se acelera.

Los sentidos indicados para T_1 y T_3 son los correctos puesto que una cuerda sólo puede transmitir tensión, como es obvio.

El mismo razonamiento se aplica a la otra polea, de modo que $|\vec{T_2}| = |\vec{T_4}|$.

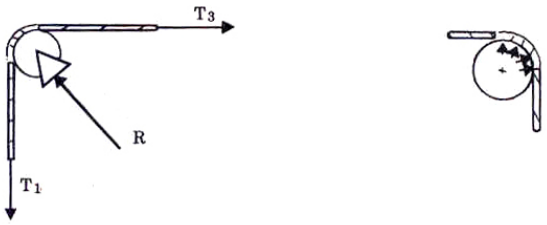


Figura VI.13:

Reemplazando los valores de las tensiones, tenemos:

$$\text{Fuerza Neta sobre} \qquad M_3|_x = T_2 - T_1.$$

Ahora si M_3 se mantiene fija con la mano, la fuerza neta es $M_3 = T_2 - T_1 + F_{\text{mano}} = 0$, y todo el sistema permanece en reposo $(a = 0)$. Reemplazando los valores $T_1 = M_1\, g$ y $T_2 = M_2\, g$ obtenidos en la parte a), tenemos que:

Fuerza aplicada por la mano $= (M_1 - M_2)\, g$.

c) Si sólo M_1 se mantiene fijo, entonces todo el sistema está en reposo. Resuelvo las ecuaciones de derecha a izquierda. Las ecuaciones de Newton aplicadas a la masa M_2, dan como resultado: $T_2 = M_2\, g$, puesto que M_2 no se mueve.

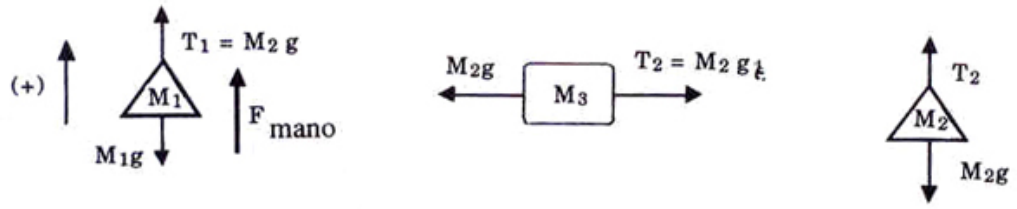


Figura VI.14: Diagrama de fuerzas correspondientes al caso c) para cada una de las masas.

Como M_3 permanece en reposo, entonces:

$$T_1 - T_2 = 0 \implies T_1 = T_2.$$

Las fuerzas actuando sobre M_1, cumplen la siguiente ecuación:

$$T_1 - M_1\, g + F_{mano} = 0, \qquad \text{pero} \qquad T_2 = M_2\, g = T_1,$$

entonces, reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos el valor de la fuerza ejercida por la mano, que es el mismo resultado obtenido en la parte b), como era de esperar:

$$F_{mano} = -(M_2 - M_1)g.$$

Si $M_2 > M_1 \;\Rightarrow\; F_{mano} < 0 \Rightarrow$ Debo tirar la masa M_1 hacia abajo para mantenerla en posición.

d) Veamos ahora los valores que se obtienen si el sistema se mueve libremente. Suponemos que el sistema se desplaza hacia la *derecha* con aceleración a.

$$T_1 - M_1\, g = M_1\, a.$$

En este caso registramos sólo las ecuaciones en la dirección horizontal, puesto que en la dirección vertical no existe movimiento para M_3:

Figura VI.15: Diagrama de cuerpo libre para el caso d). Si $M_2 > M_1$, entonces $a > 0$, y el sistema se acelera en el sentido indicado en la Figura. Si $M_2 < M_1,\ a < 0$ y el sistema se mueve en el sentido opuesto.

$$T_2 - T_1 = M_3\, a,$$
$$-T_2 + M_2\, g = +M_2\, a.$$

Sumando las 3 ecuaciones obtenemos:

$$-M_1\, g + M_2\, g = (M_1 + M_2 + M_3)\, a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{(M_2 - M_1)\, g}{M_1 + M_2 + M_3},$$

De la segunda ecuación, se llega a:

$$T_2 - T_1 = \frac{M_3(M_2 - M_1)\, g}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Si $M_3 = 0$, entonces $T_2 = T_1 \equiv T$.

Análogamente, si $M_2 = M_1$ entonces $T_1 = T_2$ y además $a = 0$. El sistema permanece en reposo si lo estaba inicialmente.□

Cabe notar que las reacciones denominadas por R que aparecen debido al cambio de dirección que sufre la tensión en las poleas, generan una fuerza neta sobre la mesa.

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$ para que M_1 (y por lo tanto M_2) permanezca en reposo con respecto a M? No existe roce en ninguna superficie. La cuerda es inextensible y no tiene masa.

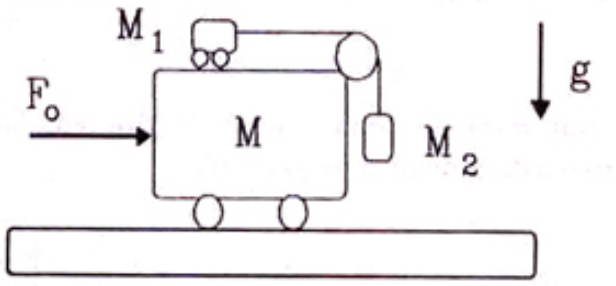


Figura VI.16: En este problema debemos encontrar el valor de la fuerza que le comunica al sistema una aceleración igual a la que experimenta la masa M_1 que va montada sobre el carro. La aceleración de ésta última se debe al peso de M_2.

Como M_1 sostiene a M_2, debe sufrir una aceleración generada a través de la tensión de la cuerda que los une. Para que M_1 permanezca en *reposo con respecto a M* el valor de su aceleración debe ser igual al que adquiere M debido a las fuerzas que actúan sobre ella. Estas fuerzas son: la reacción horizontal de M_2 sobre M, *la reacción R que se ejerce sobre la polea y que proviene de la tensión de la cuerda* y la fuerza externa $\vec{F}_0$.

No podemos ubicarnos en un sistema de referencia que se mueva con M puesto que *no* es un sistema inercial. (En realidad es posible, pero debemos incluir fuerzas no inerciales y no estamos preparados para hacerlo).

A continuación aplicamos las leyes de Newton para resolver el problema.

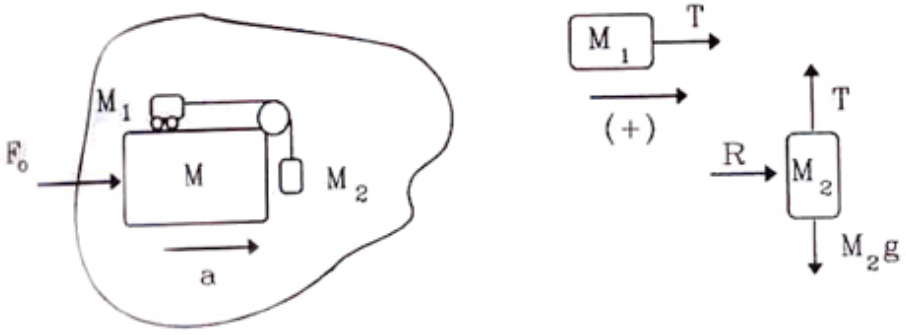


Figura VI.17: Se incluye a la izquierda el diagrama de cuerpo libre de *el sistema considerado como un todo*. A la derecha aparecen los diagramas de cuerpo libre de las masas M_1 y M_2.

Supongamos que F_0 tiene el valor correcto y que, por tanto, la masa M_1 no se mueve *con respecto a M*. A partir del diagrama de cuerpo libre de M_1 [VI.17] obtenemos para las fuerzas horizontales:

$$M_1\, a = T.$$

donde a es la aceleración que adquiere el sistema. De la misma Figura, las fuerzas *verticales* sobre M_2 dan la siguiente ecuación:

$$-T + M_2\, g = 0,$$

puesto que M_2 *no cae*, conserva la misma altura con respecto al piso durante todo el movimiento del sistema.

$$\Rightarrow a = \frac{M_2}{M_1}\, g,$$

pero, debido a que el sistema se mueve como un todo, entonces:

$$F_0 \;=\; (M + M_1 + M_2) \cdot a \qquad \Rightarrow$$

$$F_0 \;=\; (M + M_1 + M_2)\tfrac{M_2}{M_1} \cdot g.$$

Este resultado parece razonable puesto que si $M_2 = 0$ entonces la fuerza que es necesario aplicar es nula puesto que M_1 no se moverá por sí sola. Si M_2 es mucho mayor que M_1, entonces para evitar que M_2 se mueva, la fuerza inercial de M_1 ($M_1 a$) debe ser igual a la fuerza que se ejerce sobre M_2 ($M_2 g$) y como M_1 es pequeña, entonces la aceleración a debe tomar un valor muy alto.

Si M_1 se hace igual a cero, no existe ninguna posibilidad de mantener M_2 en reposo con respecto a M puesto que la tensión T se hace cero y no hay forma de equilibrar el peso de M_2. □

Ejercicio

Encontrar esta misma solución (Figura [VI.17]), analizando el diagrama de cuerpo libre en cada una de las masas.

Indicación: Recuerde incluir la reacción de la polea sobre M. □

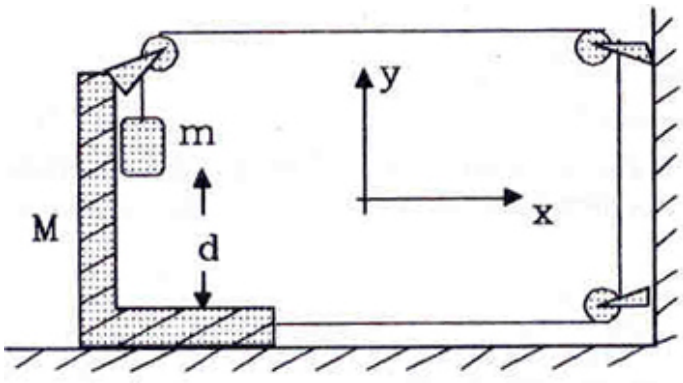


Figura VI.18:

Ejemplo

Las superficies que aparecen en la Figura [VI.18] no generan fuerzas de roce. Si en el instante $t = 0$ se suelta la masa m, calcule cuánto tiempo tarda en chocar con el piso. Los valores para cada una de las variables son: $m = 0,150$ kg, $M = 1,650$ kg, y la distancia d = 1 m.

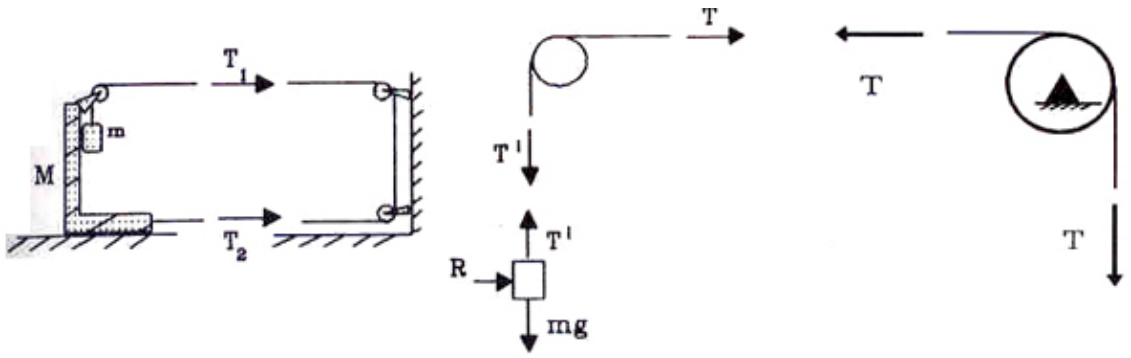


Figura VI.19: Aquí se incluye el sistema original y los diagramas de cuerpo libre de la masa M y m. La Figura muestra que si la masa M avanza, digamos 1 cm hacia la derecha, la distancia que recorre el hilo entre la masa M y la pared se acorta en 2 cm y, en consecuencia, la masa m baja *2 cm*.

La tensión en el hilo es la misma en el tramo horizontal superior o inferior puesto que el hilo *no* tiene masa y las poleas no ofrecen resistencia al movimiento.

En la parte a) de la Figura [VI.19] se indica el diagrama de cuerpo libre del sistema M y m. Considerando sólo las fuerzas horizontales, deducimos que,

$$T_1 = T_2 \equiv T$$

A continuación obtenemos la ecuación de movimiento para el sistema M y m. Como se mueve en la dirección positiva del eje x, la masa m se desliza cayendo sobre M pero siempre pegada a M, tal como lo indica la Figura. De esta forma $a_x^m = a_x^M \equiv a_x$.

Con el diagrama de cuerpo libre de la parte a) de la Figura, considerando sólo las fuerzas en la dirección x, se obtiene:

$$2\,T = (M + m)\,a_x.$$

Tenemos una ecuación y dos incógnitas: a_x y T. Necesitamos más información.

Examinando el movimiento de la masa m en la dirección y, a partir del diagrama de cuerpo libre de la parte b) de la Figura [VI.19], obtenemos:

$$+T' - m\,g = m\,a_y. \qquad (a_y^m \equiv a_y).$$

La aceleración de m es la única que tiene una componente adicional en la dirección y.

No hemos progresado mucho porque sumamos una ecuación a la anterior pero, aparecieron dos incógnitas: T' y a_y.

De la Figura se desprende que si en un intervalo Δt s, M avanza hacia la derecha Δx, metros, m cae, en el mismo intervalo, *dos veces esa cantidad* $2\,\Delta x$. Por lo tanto, *en cada instante, la componente vertical de la velocidad* de m, es el doble de la componente horizontal de la velocidad de M, si la cuerda permanece en tensión.

Concluimos que la aceleración de m debe ser el doble de la de M en todo instante. Para confirmar este resultado, basta examinar la definición de la aceleración:

$$a = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad a' = \frac{2\,v(t+\Delta t) - 2\,v(t)}{\Delta t} \implies a' = 2\,a.$$

En nuestro caso, este resultado se traduce en la siguiente ecuación:

$$a_y = 2\,a_x.$$

Con este resultado, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Aún nos falta una ecuación.

Relacionaremos T' con T. Por las mismas razones explicadas anteriormente (esencialmente el hecho que la cuerda no tenga masa y que las poleas no tengan roce),

$$T' = T.$$

Con esta ecuación tenemos cuatro incógnitas para cuatro ecuaciones y podemos resolver el problema. Como las ecuaciones no son complicadas no detallamos los pasos intermedios (**Ejercicio**). La respuesta es:

$$a_y = \frac{4\,m\,g}{M + 5\,m}.$$

A partir de esta ecuación podemos obtener el resto sin dificultades.

Para calcular cuánto demora en caer la masa m, se usa la fórmula de cinemática, válida para aceleraciones constantes, indicada a continuación:

$$y = y_o + v_o\,t + \frac{1}{2}\,a_y\,t^2.$$

Introduciendo los datos numéricos en la ecuación, obtenemos $t = 0,9$ s.□

Ejemplo

La Figura [VI.20] muestra una cuerda de largo ℓ y de masa μ por unidad de largo, que cuelga entre dos paredes. La cuerda forma un ángulo α en el punto que toca a las paredes.

a) Encuentre el valor de la fuerza que se debe ejercer sobre cada uno de sus extremos para sostenerla.

b) Encuentre el valor de la tensión de la cuerda en su punto más bajo.

Por la simetría del problema, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debe ser la misma en ambos extremos. Basta pensar que no hay forma de distinguir un extremo del otro.

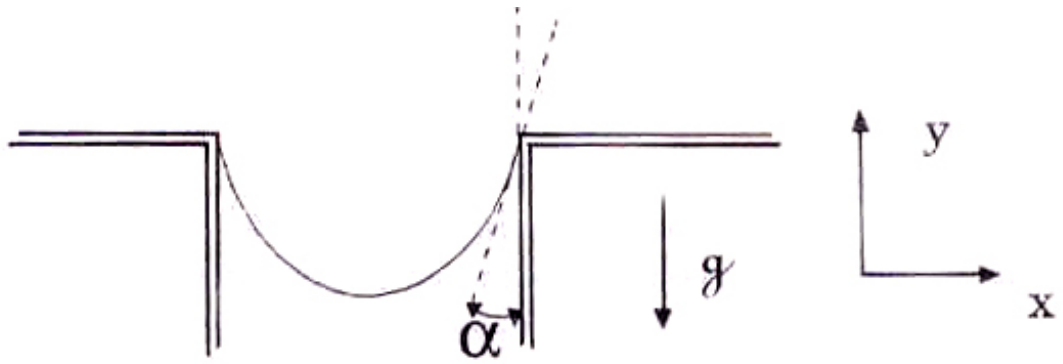


Figura VI.20: La cuerda está sostenida de sus extremos. Como es absolutamente flexible (se puede doblar sin ninguna dificultad), la forma que adopta depende de su longitud y del espacio que separa ambas paredes.

Debido a su extrema flexibilidad, la cuerda transmite sólo tensiones en la dirección de su tangente en cada punto.

Estos dos puntos serán usados en la resolución de este ejemplo y son, además, de aplicación general.

a) Para encontrar la fuerza sobre los extremos usamos un diagrama de cuerpo libre que incluya a toda la cuerda y reemplazamos las paredes por las fuerzas necesarias para sostenerla.

El peso total de la cuerda es $W = -\mu\,\ell\,g$ y apunta en sentido negativo (ver Figura).

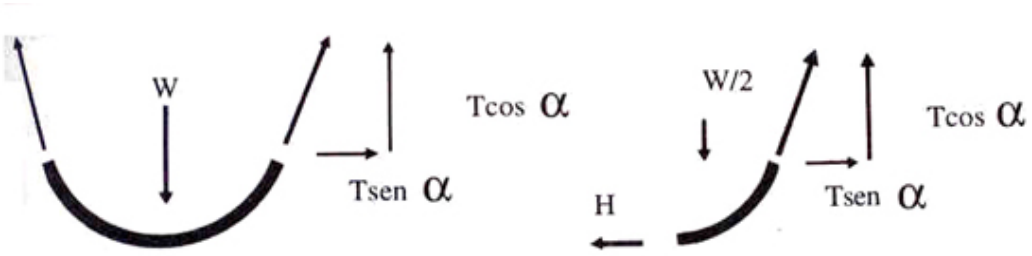


Figura VI.21:

Como la fuerza en el extremo superior se alinea con la dirección de la tangente a la cuerda, tiene una proyección vertical $T_y = T\,\cos\,\alpha$ y una componente horizontal $T_x = T\,sen\,\alpha$.

Ya que el sistema permanece en reposo, no tiene velocidad ni aceleración, por lo tanto la suma de las fuerzas externas debe anularse, en cada una de las direcciones:

$$\text{En el eje x:} \qquad T\,sen\,\alpha - T\,sen\,\alpha \;=\; 0,$$

$$\text{En el eje y:} \qquad T\,\cos\,\alpha + T\,\cos\,\alpha - W \;=\; 0.$$

Sólo la última ecuación nos informa acerca del valor de la tensión en el extremo de la cuerda. La primera se cancela automáticamente debido a la simetría del problema.

Obtenemos para T, la siguiente expresión:

$$T = \frac{W}{2\,\cos\,\alpha} = \frac{\mu\,\ell\,g}{2\,\cos\,\alpha}.$$

Este resultado es razonable y coincide con lo esperado en casos particulares más simples: si $\alpha = 0$, las dos paredes están casi juntas y existen sólo componentes verticales. Cada extremo soporta la mitad del peso de la cuerda. Si $\alpha = \pi/2$, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debido a su peso es infinita, sin importar el valor de su masa total. Este resultado nos señala que por pequeña que sea la fuerza aplicada sobre la cuerda (o, como en este caso, el efecto de su propio peso), para sostenerla, la cuerda debe deformarse.

b) Para calcular la tensión en el *punto más bajo* de la cuerda, debemos usar un diagrama de cuerpo libre que incluya explícitamente esa fuerza.

Tomemos la mitad derecha de la cuerda (ver Figura), y designemos la tensión en el punto más bajo como H (tangente a la cuerda). Ayudándonos de la geometría, podemos deducir que la fuerza en ese punto es horizontal: si no lo fuera uno de sus puntos vecinos estaría más bajo, contradiciendo la hipótesis inicial.

Aplicando nuevamente el equilibrio de fuerzas y recordando que debemos incluir el peso de la mitad de la cuerda: $W/2$, tenemos:

$$\text{En el eje x:} \qquad -H + T\,sen\,\alpha = 0, \Longrightarrow\ H = T\,sen\,\alpha,$$

$$\text{En el eje y:} \qquad T\,\cos\,\alpha - W/2 = 0.$$

La segunda ecuación se cumple automáticamente al reemplazar los valores obtenidos anteriormente.

Introduciendo el valor de T en la primera ecuación, obtenemos el resultado buscado:

$$H = \frac{\mu\,\ell\,g}{2}\,\tan\,\alpha.$$

Al igual que en la parte a), si $\alpha \longrightarrow \pi/2$, o sea, a medida que se intenta formar una línea recta con la cuerda, la tensión tiende a ∞. Por otra parte, si las paredes se acercan, la tensión en el punto más bajo disminuye tendiendo a cero con $\alpha = 0$.□

Ejemplo

Una niña se desliza por un plano inclinado sobre un carrito, tal como se observa en la Figura [VI.22]. Si el ángulo del plano inclinado con la horizontal es θ, y la niña, que tiene masa M, parte del reposo desde una altura h, calcule:

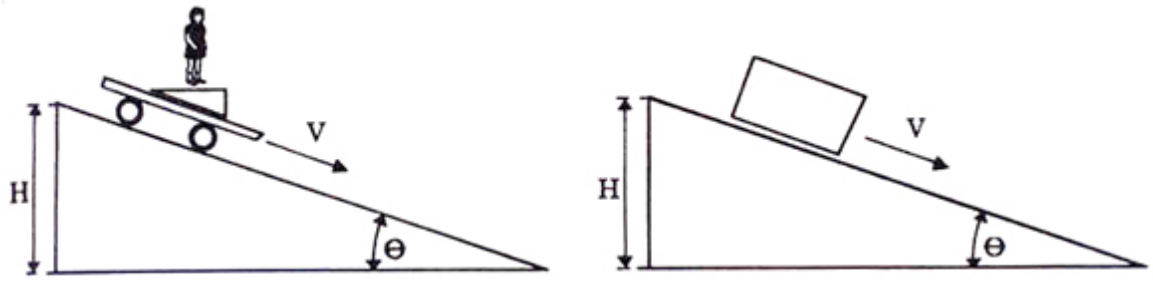


Figura VI.22: La niña se desliza por la pendiente. En la parte a) del problema podemos pensar en un bloque deslizándose. En el punto siguiente, lo imaginamos como dos bloques cayendo juntos y nos preocupamos de la fuerza de reacción del bloque inferior sobre el superior.

a) Cuánto se demora en llegar al piso.

b) Suponga que en el carro va una balanza y la niña se desliza parada sobre ella, ¿cuál es la lectura de la balanza?

a) Para encontrar el tiempo que tarda la niña en llegar al piso, debemos calcular la componente de la fuerza que apunta en la dirección paralela al piso de la cuña, con el valor de esta fuerza podemos encontrar la aceleración a través de la segunda ley de Newton. A continuación, con las ecuaciones de la cinemática, calculamos el tiempo que tarda en llegar al piso.

El hecho de identificar uno de los cuerpos como una niña es simplemente para relacionarlo con una situación real. Las leyes de Newton consideran a todos los cuerpos como masas puntuales *sin dimensiones espaciales*. Por esta razón, cuando utilizamos la segunda ley de Newton, trasladamos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a un sólo punto. Más tarde, al incorporar el torque a nuestro análisis, aparecen más ecuaciones –que se suman a las anteriores–, y en ellas debemos especificar el lugar donde actúan las fuerzas.

Para calcular la aceleración del bloque, lo incluyo dentro del diagrama de cuerpo libre. En este caso conviene proyectar las fuerzas sobre un sistema de referencia donde el eje–x se alínea con la dirección del plano inclinado y el eje–y, en la dirección perpendicular a él. Esta elección de ejes coordenados nos facilita los cálculos.

Al sacar la cuña, la reemplazamos por una fuerza de contacto R, que apunta en la dirección del eje–y. Esta reacción no presenta componentes en la dirección x, porque hemos supuesto que el roce entre el bloque y el piso es despreciable. El peso de la niña (o el bloque) debe proyectarse sobre estos ejes coordenados (Figura [VI.23]). El resultado es:

$$\text{En el eje–y} \qquad M\,g\,\cos\theta - R = \;\; 0, \qquad a_y = 0,$$

$$\text{En el eje–x} \qquad M\,g\,sen\,\theta = \qquad M\,a_x.$$

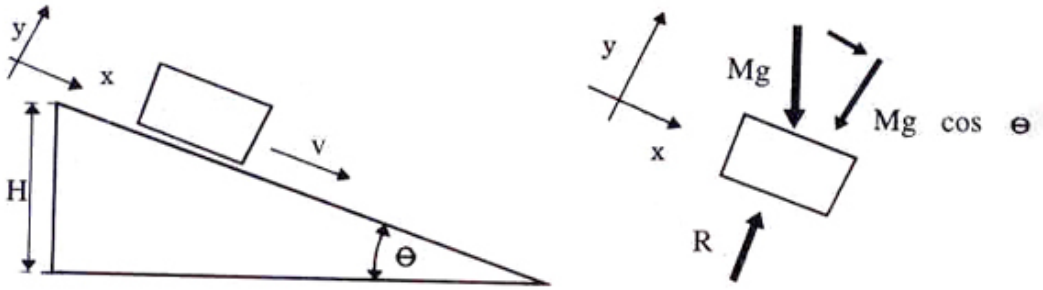


Figura VI.23:

El origen de cada una de estas ecuaciones es el siguiente: en la dirección y de la Figura, el bloque no cambia de velocidad, por lo tanto la componente a_y de la aceleración es nula, y la ecuación se reduce a la suma de las fuerzas externas en esa dirección.

Para los cálculos en la dirección x no debemos olvidar que a_x no es nula y que la única fuerza que tiene proyección en esa dirección es $M\,g$.

De la última ecuación obtenemos la aceleración:

$$a_x = g\,sen\,\theta.$$

(Note que la aceleración es independiente de la masa del cuerpo que resbala. Todos caen con la misma aceleración si no existe roce.)

A partir de esta aceleración poddemos encontrar el tiempo que tarda en alcanzar el borde inferior de la cuña:

$$\text{Como} \quad x = \frac{1}{2}\,a_x\,t^2, \quad \text{y} \quad d = \frac{h}{sen\,\theta}, \quad \text{pero,} \quad d = \frac{1}{2}\,g\,sen\,\theta\,T^2, \quad \text{obtenemos:}$$

$$T = \sqrt{\left[\frac{2\,h}{g\,\text{sen}^2\theta}\right]}.$$

La expresión a la derecha de T tiene dimensiones de tiempo, como debe ser. Por otra parte, de esta fórmula deducimos que si $\theta = \pi/2$, la aceleración $a_x = g$, conforme a lo que esperábamos, puesto que $\theta = 90^o$, corresponde al caso de caída libre.

Ahora si $\theta = 0^o$, el tiempo que demora es infinito debido a la ausencia de pendiente en la cuña.

b) Calculamos ahora el peso que marcaría una balanza puesta en la cuña que se ubica inmediatamente debajo de la niña (Figura [VI.22]). Precisemos también a qué cantidad física corresponde la lectura de la balanza: *lo que mide la balanza es la reacción del bloque inferior sobre la niña*.

Por el principio de acción y reacción, esta reacción es la misma fuerza (pero con sentido opuesto) con la cual la niña presiona al bloque inferior, es decir lo que denominamos el peso.

Para calcular esta fuerza tomamos un sistema de referencia con un eje vertical y el otro horizontal. Este cambio de sistema con respecto al punto anterior obedece a que necesitamos calcular una

aceleración vertical, por tanto usamos un sistema de referencia en el cual uno de sus ejes coincida con esa dirección.

Escogemos como nuestro objeto de estudio la niña y construimos su diagrama de cuerpo libre (Figura [VI.24]). En este caso nos interesan únicamente las fuerzas verticales, puesto que en esa dirección actúa la reacción del bloque inferior:

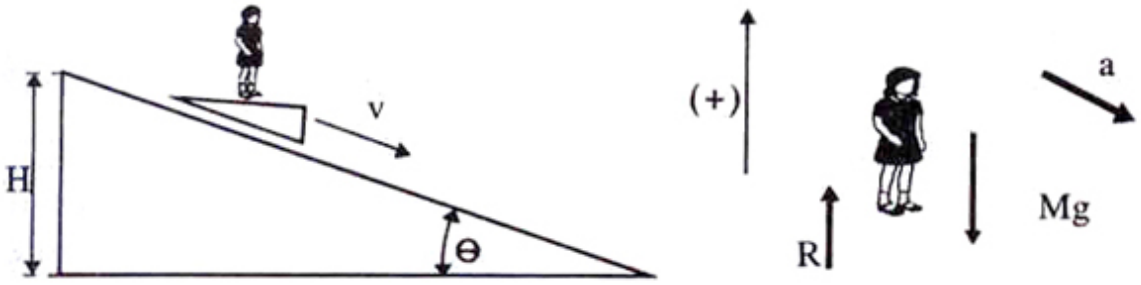


Figura VI.24:

$$R - M\,g = -M\,a,$$

la aceleración a que aparece en la ecuación, es la proyección de a_x, en la dirección vertical: la única aceleración distinta de cero obtenida en la pregunta anterior. Su proyección es $a_x\,sen\,\theta$. Reemplazando a por este valor y despejando R, obtenemos:

$$R = M\,g\,[1 - \text{sen}^2\theta] = M\,g\,\cos^2\theta.$$

Si $\theta = 0$, entonces $R = M\,g$, como era de esperar, puesto que la cuña se transforma en una placa paralela al piso.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $R = 0$, debido a que ambos, el bloque y la niña están en caída libre y no hay reacción de uno sobre el otro.□

VI.6. EJERCICIOS

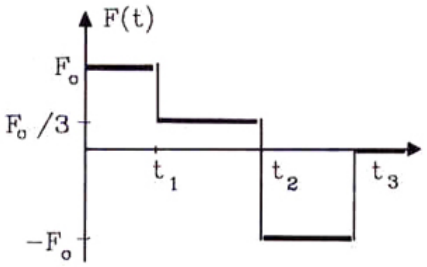
1.– Un objeto se encuentra sobre un plano liso, sin roce y es sometido a una fuerza $\vec{F}$ que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es m, obtenga:

   i) Aceleración del objeto en función del tiempo. (Graficar).

   ii) Velocidad de esta masa, si parte inicialmente del reposo (Graficar).

   iii) Posición del objeto en función del tiempo, si parte del origen.

2.– Sobre un plano sin roce se encuentra un objeto de masa $m = 2$ kg. Sobre él actúan dos fuerzas F_1 = 3 N y F_2 = 6 N como muestra la Figura. Encuentre:



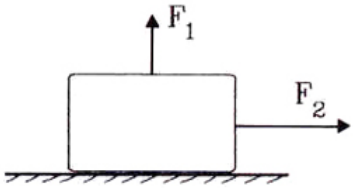


Figura VI.25: Problema # 1 Problema # 2

a) El vector aceleración del objeto.

b) Dirección, sentido y magnitud de su velocidad en función del tiempo, si parte del origen.

3.– Un bloque de masa **m** se suelta a partir del reposo sobre un plano inclinado sin roce.

a.- Encuentre la aceleración del objeto.

b.- Analice todas las fuerzas que actúan sobre él, indicando su valor.

4.– Sobre una superficie lisa se pretende tirar el carrito de masa m que se muestra en la Figura, de modo que no se despegue del suelo.

Para las dos situaciones señaladas en la Figura, obtenga el valor de las fuerzas que actúan sobre el carro y compare el resultado.

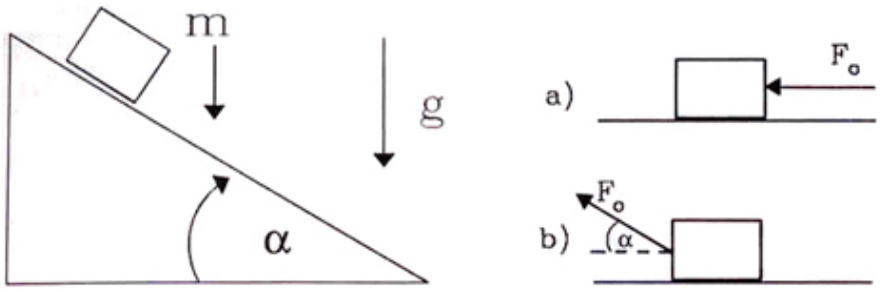


Figura VI.26:

5.– Una locomotora de masa M, que arrastra un carro de masa m y se autopropulsa con una fuerza F_o, avanza por un plano inclinado con pendiente α.

Calcule:

a.- La aceleración del sistema.

b.- Las fuerzas que actúan sobre la locomotora y el vagón.

c.- La tensión de la barra que une ambos objetos.

Figura VI.27:

6.– Un pintor que pesa 900 Newton trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newton. La silla misma pesa 300 Newton.

a.- ¿Cuál es la aceleración del pintor y la silla?

b.- ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?

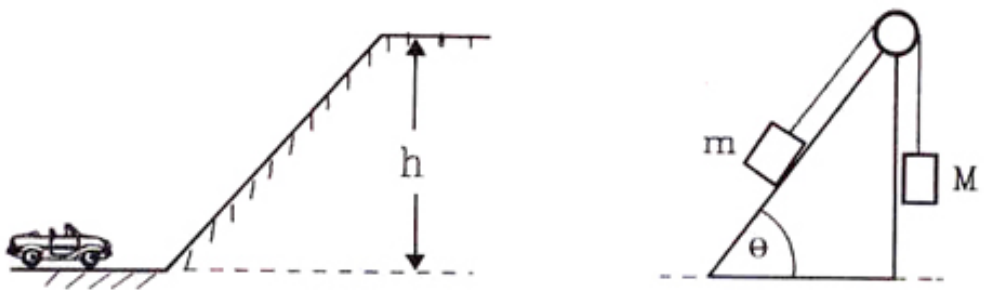
7.– Una pelota de 2 kg cae libremente y en un cierto instante tiene una rapidez de 6 [m/s]

a.- ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[m]?

b.- ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[s]?

8.– Suponga que N masas iguales de m (kg) cada una, cuelgan unidas mediante una cuerda. Determine la tensión de la cuerda ideal (sin masa) que une el cuerpo k–ésimo con el $(k-1)$–ésimo. Verifique su resultado para N = 2.

9.– Un auto se aproxima a una pendiente con una velocidad V_0. Justo al comenzar la pendiente, el auto prosigue sólo con el impulso inicial. Suponiendo que el roce con el camino y el viento es despreciable, encuentre la altura máxima *h* que logrará alcanzar con esta velocidad.



10.– Dos bloques de masa **m** y **M** están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura (**m** sobre el plano inclinado, liso y **M** colgando verticalmente), el cuerpo de masa **m**, sube con una aceleración cuya magnitud es 29/5 [m/s^2].

Si a continuación se invierten las posiciones: (**M** se coloca sobre el plano y **m** cuelga verticalmente) el cuerpo de masa **M** también sube pero esta vez con una aceleración cuya magnitud es 9/10 [m/s^2]. Determine:

a.- El valor del ángulo θ.

b.- La razón entre las masas: m/M.

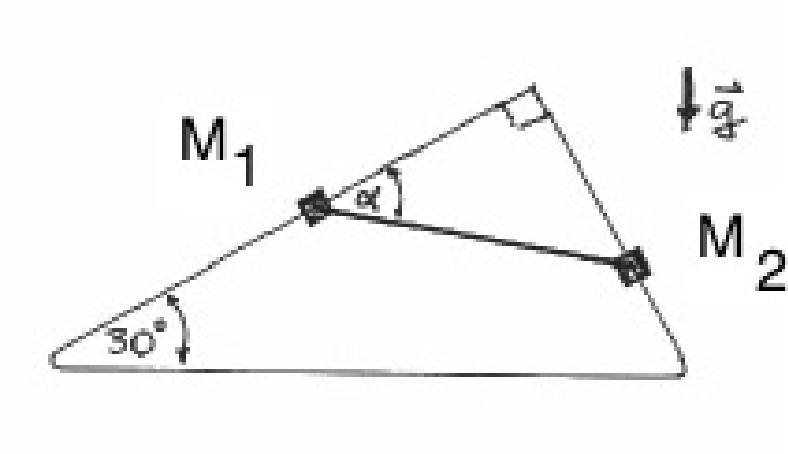
c.- Calcule el valor de las tensiones en cada uno de los dos casos y compárelos.

11.– Dos aros de masa $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ están insertas y pueden deslizar sin roce a lo largo de dos alambres que conforman los lados de un triángulo rectángulo, uno de cuyos ángulos es 30^o (Ver Figura).

Las masas están unidas por una cuerda ideal (sin masa e inextensible). Este sistema de dos masas alcanza una posición en la que se encuentra en equilibrio y queda en reposo. En esta situación la cuerda forma un ángulo α con la barra de la izquierda.

a.- Dibuje el diagrama de cuerpo libre (DCL) para cada una de las masas. Sea explícito, indique los ángulos con respecto a la vertical, por ejemplo.

b.- Escriba la segunda ley de newton correspondiente a cada una de ellas. **NO** se pide resolverlas.



12.– Considere el sistema de dos bloques de la figura. Ambos tienen la misma masa **M** y el ángulo de inclinación de las caras en contacto es $\alpha < \pi/2$. El roce es despreciable en todas las superficies expuestas.

a.- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de ambos bloques y el correspondiente a cada uno de ellos y escriba las ecuaciones de movimiento que se desprenden de estos diagramas.

b.- Calcule el máximo valor que puede adoptar la fuerza $\mathbf{F}_o$ que se aplica sobre el cubo de la derecha in que el cubo situado a su izquierda esté a punto de levantarse del piso.

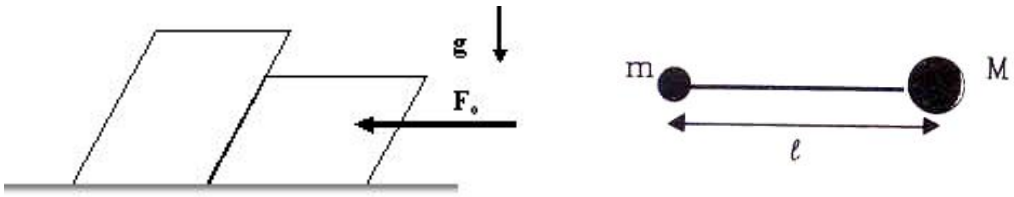


Figura VI.28:

13.– Dos masas m y M se encuentran unidas por una barra de masa despreciable y largo ℓ. En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme, en torno a un eje perpendicular al plano de las masas, con frecuencia **f**. El eje se ubica en un punto que definimos como el centro de masa del sistema y es tal que se cumple $M\,x\,=\,m\,y$, donde **x** e **y** representan la distancia del eje a la masa **M** y **m** respectivamente.

Calcule la tensión en la barra que une ambas masas.

14.– VI.29 En el diagrama de la figura los bloques relevantes no tienen roce. La polea que une las masas $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ mediante un hilo, tiene masa despreciable. El eje de esta polea está conectado a la masa **M** mediante un hilo sin masa.

a.- Dibujar el diagrama de cuerpo libre asociado a **M**, la polea, la masa $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$.

b.- Encuentre la aceleración de $\mathbf{M}_2$, si $\mathbf{M}_1\,=\,\infty$ (o adquiere un valor muy alto).

c.- ¿Cuál es la aceleración de la masa **M** si $\mathbf{M}_1$ **=** $\mathbf{M}_2$**= m**?

d.- Existe movimiento relativo entre estas dos masas si son iguales? ¿Cómo puede probarlo?

15.– Un cubo de masa M presenta una cavidad cilíndrica de radio R centrada en su interior. Alrededor del eje del cilindro gira una masa m con velocidad angular constante ω_o.
a.- Encuentre la reacción del piso sobre el bloque en función del tiempo.
b.- Suponga que el bloque M se encuentra sobre un piso plano (sin paredes que lo mantengan fijo). En cuentre el valor del coeficiente de roce estático μ_{est} para mantener el bloque M fijo.

16.– Una cuerda sin masa cuelga sostenida desde sus extremos separados por una distancia D. A esta cuerda se le añaden cuatro masas iguales m, a una distancia ℓ entre ellas. La cuerda forma un ángulo θ_1 en los extremos y, entre las dos masas centrales, permanece horizontal,

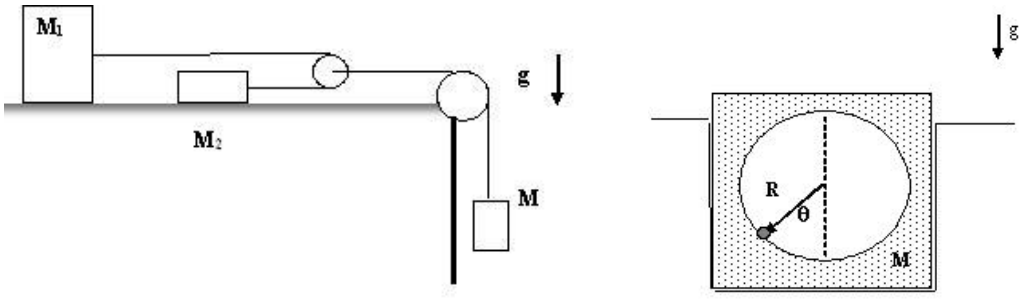
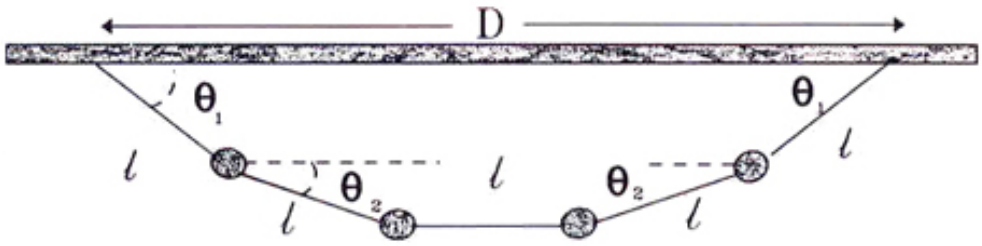


Figura VI.29: *DCL para dos poleas y tres masas. La reacción sobre el piso debido al movimiento circular.*

formando un ángulo θ_2 con sus vecinos. Calcule la tensión en cada tramo de la cuerda, en función de θ_1, m y g. Encuentre el valor del ángulo θ_2.



17.– Considere tres cuerdas idénticas de largo **L**, inextensibles y de masa despreciable. A los extremos de estas cuerdas se unen tres masas (m) idénticas formando un circuito cerrado. El sistema se ubica sobre una superficie plana sin roce y, de alguna forma ingeniosa, se hacen girar sobre ella hasta alcanzar una velocidad angular constante ω_o. Encuentre la tensión que se ejerce en cada uno de las cuerdas. Por simetría, la figura de las tres masas rotando debe ser la de un triángulo equilátero.

18.– Una bola pesada está suspendida por un hilo, como muestra la figura. Un tirón rápido en el hilo inferior cortará ese mismo hilo. Si se aumenta la tensión lenta y sostenidamente sobre el hilo inferior, se cortará el hilo superior. El primer resultado ocurre debido a :

a) La fuerza es muy pequeña para mover la bola. b) Acción y reacción. c) La bola tiene inercia. d) La fricción del aire mantiene la bola atrás. e) La bola tiene mucha energía.

19.– La aceleración apunta siempre en la dirección:

a.- Del desplazamiento. b.- De la velocidad inicial. c.- De la velocidad final. d.- De la fuerza neta. e.- Opuesta a la fuerza de fricción.

20.– En el juego de tirar la cuerda, dos hombres la tiran cada uno con una fuerza de 100 N en sentidos opuestos. La tensión en la cuerda es de :

a) 100 N. b) 200 N. c) Cero. d) 50 N. e) $100 * \sqrt{2}$ N

21.– Un actor de circo cuyo peso es W, camina a lo largo de un alambre en altura como muestra la figura. La tensión en el alambre es :

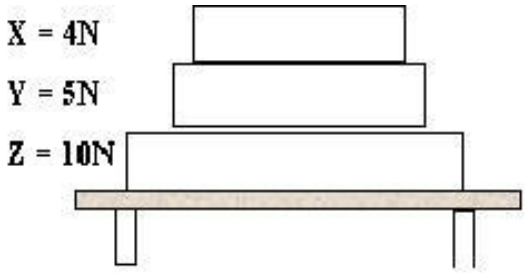
a) Aproximadamente W. b) Aproximadamente $W/2$. c) Mucho menos que W. d) Mucho más que W. e) Depende: si se sostiene en uno de sus pies o en ambos.

22.– Un ascensor de 700 Kg acelera hacia abajo a $3\,m/s^2$. La fuerza ejercida por el cable sobre el ascensor es (Definimos $1kN = 1000$ newton)

a) 2.1 kN, hacia arriba. b) $2{,}1\,kN$, hacia abajo. c) $4{,}8\,kN$, hacia arriba. d) $4{,}8\,kN$, hacia abajo. e) $9\,kN$, hacia arriba.

23.– Un bloque de concreto de $5\,Kg$ se baja con una aceleración de 2.8 m/s^2 por medio de una cuerda. La fuerza del bloque sobre la cuerda es:

a) $14\,N$, hacia arriba. b) $14\,N$, hacia abajo. c) $35\,N$, hacia arriba. d) $35\,N$, hacia abajo. e) $49\,N$, hacia arriba.



24.– Tres libros (X, Y y Z) descansan sobre una mesa. El peso de cada libro se indica en la figura. La fuerza del libro Z sobre el libro Y es :

a) 0. b) $5\,N$. c) $9\,N$. d) $14\,N$. e) $19\,N$.

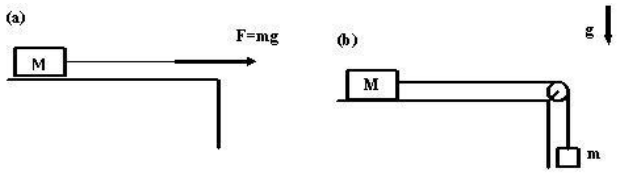
25.– Si sobre un cuerpo actúa una sola fuerza: ¿Podría tener aceleración nula? ¿Puede ser la velocidad nula en un cierto instante?

26.– ¿Por qué es preciso empujar con más fuerza el pedal de una bicicleta al comienzo del movimiento que en el instante que ya lo está y además con una rapidez constante?

27.– Un camión transporta pájaros vivos encerrados en un contenedor (con ventilación, agua y vista al mar, pero sin posibilidad de abandonar la caja!). Al llegar a un puente, el conductor se percata que lleva más carga de la que soporta el puente. Para cruzarlo y no caer a las frías y revueltas aguas que se aprecian bajo el puente, decide hacerlo utilizando cambios muy bruscos de velocidad (tirones) para así mantener los pájaros volando dentro del contenedor y disminuir el peso. ¿Cuál es, a su parecer, el destino de este camión: llega o no a salvo al otro extremo del puente?

28.– Un camión muy pesado y un auto pequeño chocan de frente. En cualquier instante durante el choque, cuando ambos están en contacto: ¿Cuál de ellos experimenta la mayor fuerza? ¿Y cuál de ellos la mayor aceleración?

29.– Se afirma que un objeto cayendo libremente en el aire, alcanza una velocidad terminal constante debido a la resistencia o viscosidad del aire.
Opina Ud. que una gota de lluvia tiene menor velocidad en la azotea de un edificio de 10 pisos que al llegar a la calle. En otras palabras que a 10 pisos de altura ya alcanzó su velocidad terminal. Explique si está de acuerdo o no con esta afirmación y esgrima un argumento basado en principios físicos en su defensa.



30.– Dos bloques idénticos de masa **M** se coloca cada uno sobre una superficie horizontal pulida (ver Figura). Uno de ellos se tira, horizontalmente, mediante una cuerda en cuyo extremo libre se aplica una fuerza de magnitud $\vec{F} = m\,g$ (Figura a).

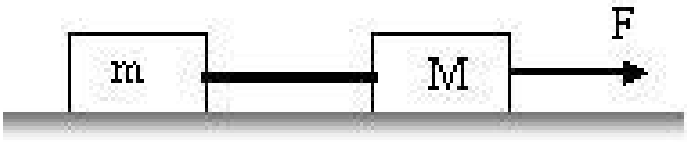
El otro bloque (Figura b) también se tira horizontalmente mediante una cuerda, pero en este caso su extremo libre está atado a una esfera de masa **m** . Determine la aceleración de cada bloque y compárelos.

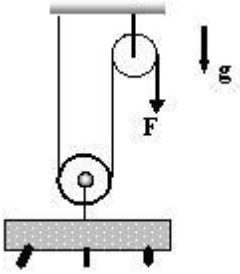
31.– Sobre un carro de masa **M**, se aplica una fuerza $\vec{F}$, conocida. A este carro se le une, a través de una barra rígida, de masa despreciable, otro carro de masa **m**. Si el conjunto se mueve sobre un plano con roce despreciable, determine:

a.- La aceleración del sistema debido a la fuerza $\vec{F}$. Indicación: puede tomar DCL de las dos masas y la barra, juntas.

b.- Las fuerzas que actúan sobre las masas **M** , **m** y la que actúa sobre la barra que las une. Indicación: Tome DCL de cada uno de los elementos por separado.

c.- Suponga ahora que la fuerza $\vec{F}$ se aplica al carro de masa **m**, sin cambiar, ni su magnitud ni dirección ni sentido: ¿Cuál es el valor de la fuerza que soporta la barra que las une en este caso? ¿Hay una diferencia de signo con el caso anterior?





32.– Una persona está subiendo lentamente un piano desde la calle hasta el tercer piso de un edificio de departamentos. Con este objeto usa un sistema de dos poleas y una cuerda que se grafica en la figura. Si el peso del piano es de W, ¿Cuál es la fuerza que debe ejercer para subirlo?

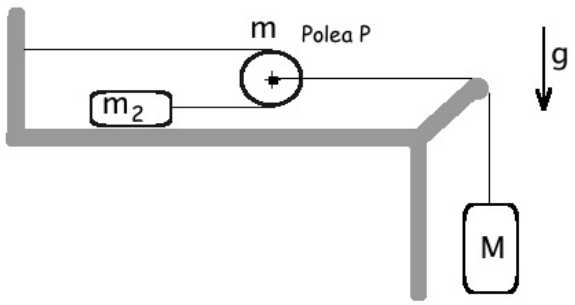
33.– En el diagrama de la figura se pide:

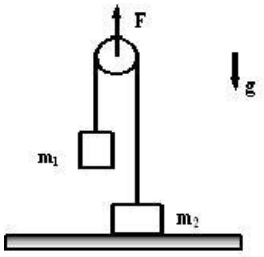
a.- Dibuje el diagrama de cuerpo libre asociado a: la masa M, la polea P y la masa m_2

b.- ¿Cuál es la relación entre la aceleración de la masa m_2 y la masa M?

c.- Encuentre la aceleración de M.

d.- Encuentre la tensión en las cuerdas.





34.– Una fuerza $\vec{F}$ se ejerce directamente hacia arriba sobre el eje de una polea de masa despreciable al igual que el cable que une las masas. Dos objetos, de masas $m_1 = 1,2$ kg y $m_2 = 1,9$ kg, están unidos a los dos extremos del cable que pasa sobre la polea. El objeto m_2 está en contacto con el piso.

a.- ¿Cuál es el máximo valor que puede adquirir la fuerza $\vec{F}$, de modo que m_2 permanezca en reposo sobre el piso?

b.- ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la fuerza $\vec{F}$ hacia arriba sea de $110\,N$? ¿Cuál es la aceleración de m_1?

35.– Un bloque, de masa m, se desliza hacia abajo en un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo α con el piso de un ascensor. Determine su aceleración con relación al plano en los casos siguientes.

a.- El elevador desciende a velocidad constante V.

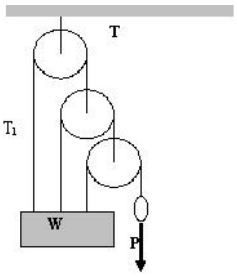
b.- El elevador asciende a velocidad constante V.

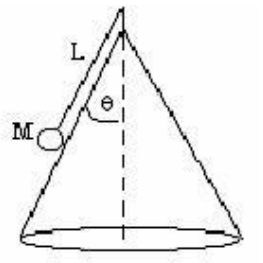
c.- El elevador desciende con una aceleración a_0.

d.- El elevador asciende con una aceleración a_0.

e.- El cable del elevador se rompe!

36.– En el sistema de poleas de la figura, se pide determinar la tensión de la cuerda que sostiene el conjunto que denominamos **T**. El peso del bloque es **W**, y se aplica una fuerza $\vec{P}$ en el extremo de la cuerda más corta para mantener el sistema en equilibrio. Las poleas no tienen masa. Encuentre el valor de la tensión en cada una de las cuerdas.



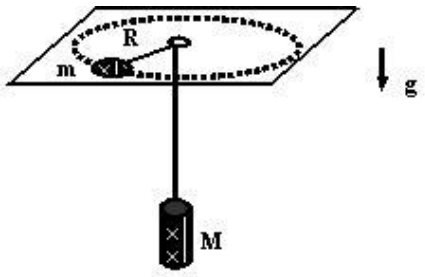


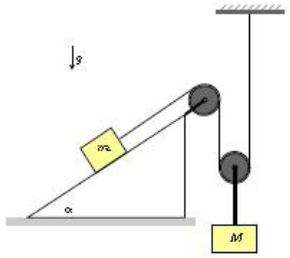
37.– Una esfera de masa M gira sobre la superficie de un cono sin roce con velocidad angular $\omega = \omega_o =$ cte. Esta esfera está unida al vértice del cono a través de una cuerda de largo L.

a.- Calcular la tensión T de la cuerda y la reacción N del cono sobre la esfera.

b.- Calcular el valor máximo de la velocidad angular ω_o para que la esferita no se despegue del manto del cono.

38.– Considere un disco de masa m sobre una mesa, atado a un cilindro de masa M que cuelga del otro extremo por medio de una cuerda que pasa por un orificio (sin roce) de la mesa. Encuentre la velocidad con que debe moverse el disco en un círculo de radio **R** para que el cilindro permanezca en reposo.

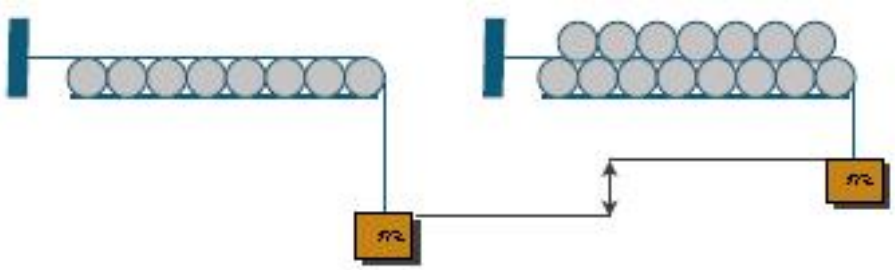




39.– Un bloque de masa **M** está sostenido por una cuerda ideal que cuelga del eje de una polea de masa despreciable. Al bajar, este bloque arrastra el bloque de masa **m**, el cual sube por un plano inclinado fijo al piso. Este plano no tiene roce.

a.- Encuentre el valor crítico que debe tener **M** para que el sistema permanezca en equilibrio (no exista aceleración).

b.- Suponga que $\mathbf{M} > \mathbf{M}_{\text{crítico}}$, el valor calculado en la sección previa. Encuentre la aceleración de ambos bloques y la tensión de la cuerda para este caso. ¿Qué sucede si $\alpha = \pi/2$?¿Y si $\alpha = 0$?



40.– Considere una cuerda que pasa sobre un conjunto de **N** cilindros ubicados paralelamente uno al otro. La cuerda los atraviesa por encima de ellos y en dirección perpendicular al eje. Desde el extremo de esta cuerda cuelga una masa **M**.

¿Cuál debe ser el valor mínimo de la masa del cilindro que se deposita sobre los anteriores, para que su peso logre levantar la masa **M** el máximo posible?

Problema Resuelto

Dos bloques de masa **m** y **M** están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura (**m** sobre el plano inclinado, liso y **M** colgando verticalmente), el cuerpo de masa **m**, sube con una aceleración cuya magnitud es 29/5 [m/s^2].

Si a continuación se invierten las posiciones: (**M** se coloca sobre el plano y **m** cuelga verticalmente) el cuerpo de masa **M** también sube pero esta vez con una aceleración cuya magnitud es 9/10 [m/s^2]. Determine:

a.- El valor del ángulo θ.

b.- La razón entre las masas: m/M.

c.- Calcule el valor de las tensiones en cada uno de los dos casos y compárelos.

Este es un problema propuesto en la guía y lo resolveremos porque es diferente a lo que usualmente se pregunta en los problemas relacionados con poleas.

Solución

DATOS: Conocemos dos aceleraciones $a_1,\ a_2$ y la aceleración de gravedad **g** .

Debemos calcular el ángulo θ y la razón entre las masas $\frac{m}{M} \equiv \lambda$

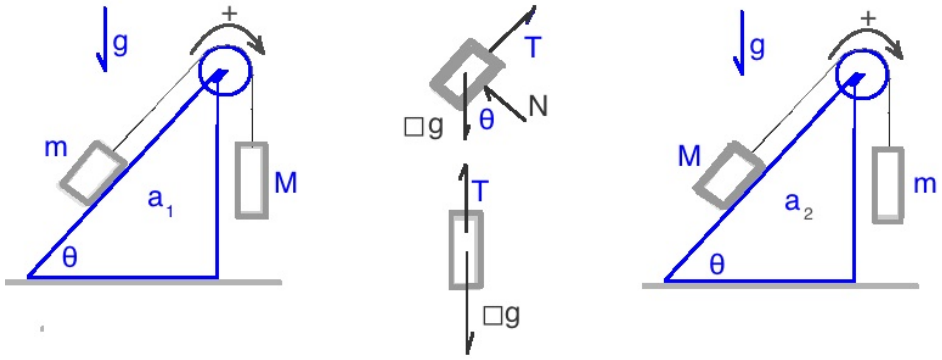


Figura VI.30: *Se muestran las dos configuraciones definidas y los diagramas de cuerpo libre de las masas* **m** *y* **M**. *En los cuadrados incluidos al lado de g, se debe incluir la masa relevante al caso 1 o al caso 2.*

Para cada una de las aceleraciones a_1 y a_2, dibujamos los DCL de **m** y **M** (ver figura) y los denominamos **Caso 1** y **Caso 2**. Obtenemos un par de ecuaciones de Newton para cada caso.

Caso 1: El sistema de masas se desplaza con una aceleración a_1.

$$\begin{aligned} -m\,g\,sen\theta + T_1 &= m\,a_1 \\ M\,g - T_1 &= M\,a_1 \end{aligned}$$

Caso 2: Al intercambiar las posiciones de las masa **m** y **M** y hacer el DCL, obtenemos

$$\begin{aligned} -M\,g\,sen\theta + T &= M\,a_2, \\ m\,g - T &= m\,a_2. \end{aligned}$$

Sumando, en ambas columnas, las dos ecuaciones obtenidas, logramos eliminar la tensión $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$, que despejaremos al final. Al sumar tenemos dos ecuaciones, una por cada configuración y a partir de estas ecuaciones obtenemos la expresión para λ y el ángulo θ. Las dos ecuaciones son

$$\frac{a_1}{g} = \frac{M - m\,sen\theta}{M + m} = \frac{1 - \lambda\,sen\theta}{1 + \lambda}.$$

$$\frac{a_2}{g} = \frac{\lambda - sen\theta}{1 + \lambda}.$$

Multiplicando la última ecuación por λ y restándola de la anterior,

$$\frac{a_1}{g} - \lambda\frac{a_2}{g} = \frac{1 - \lambda\,sen\theta - \lambda^2 + \lambda\,sen\theta}{(1 + \lambda)}.$$

$$\left[\frac{a_1}{g} - \lambda\frac{a_2}{g}\right] = \frac{1 - \lambda^2}{(1 + \lambda)} = (1 - \lambda)$$

Despejando λ tenemos

$$\lambda\left[\frac{a_2}{g}-1\right] = \frac{a_1}{g}-1 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{g-a_1}{g-a_2}.$$

Note el cambio de signo, debido a que g $\simeq$ 10 m/s^2 y a$_1$ ó a$_2$ son menores de 10. Por la naturaleza del problema **No** pueden ser mayores! (Nada cae libremente con una aceleración mayor que g.)

λ es menor que la unidad como se espera, puesto que cuando **M** cuelga, la aceleración es aproximadamente seis veces mayor que cuando **m** está en esa posición.

Conocido λ, lo introducimos en la ecuación obtenida para a$_2$/g y obtenemos

$$\frac{a_2}{g} = \frac{\lambda - sen\theta}{1+\lambda} \;\Rightarrow\; \lambda - sen\theta = \frac{a_2}{g}(1+\lambda) \;\Rightarrow\; sen\theta = \lambda - \frac{a_2}{g}(1+\lambda) = \frac{g-a_1}{g-a_2} - \frac{a_2}{g} - \frac{a_2}{g}\left(\frac{g-a_1}{g-a_2}\right).$$

Simplificando,

$$sen\,\theta = \left[\frac{g-a_1}{g-a_2}\right]\left[1-\frac{a_2}{g}\right] - \frac{a_2}{g} = \frac{g-a_1}{g} - \frac{a_2}{g}.$$

Finalmente

$$sen\theta = 1 - \left[\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g}\right] < 1$$

Podemos calcular la tensión de la cuerda en cada uno de los casos. Esto se puede ver directamente en la ecuación proveniente del DCL de la masa que cuelga libremente en cada uno de los casos.

Caso 1 : de la segunda ecuación del DCL obtenemos directamente

$$\frac{T_1}{M\,g} = 1 - \frac{a_1}{g}.$$

Análogamente en el **Caso 2**, a partir del DCL de la masa que cuelga, se obtiene

$$\frac{T_2}{m\,g} = 1 - \frac{a_2}{g}$$

A simple vista no podemos decir si son o no iguales. Si tomamos la razón entre ambas e incorporamos el valor obtenido para λ obtenemos

$$\frac{\dfrac{T_1}{M\,g}}{\dfrac{T_2}{m\,g}} = \frac{1-\dfrac{a_1}{g}}{1-\dfrac{a_2}{g}} \;\Rightarrow\; \frac{T_1}{T_2} = \frac{g-a_1}{g-a_2}\cdot\frac{1}{\lambda},$$

Finalmente, obtenemos

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{g - a_1}{g - a_2} \cdot \frac{g - a_2}{g - a_1} = 1.$$

Concluimos que las dos tensiones tienen el mismo valor. □

Bibliografía

[1] **Undertanding Physics**, K. Cummings, P. Laws, E. Redish and P. Cooney, John Wiley and son, 2004.

[2] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A DE C., México, Primera reimpresión, 1996.

[3] **Lectures on Physycs** R. P. Feynman, Vol I, Addison Wesley,1967. Ver los capítulos 9, 10 y 12, donde se discuten las leyes de Newton.

[4] **Five easy Lessons: Strategies for Successful Physics Teaching**, Randall D. Knight, Addison Wesley, SanFrancisco 2004..

[5] **Peer Instruction: A User manual**, Eric Mazur, Prentice Hall, New Jersey 1997.

[6] **Spreadsheet Physics**, C. W. Misner and P. J. Cooney, Addison Wesley Publishig Company.

Capítulo VII

ROCE ESTÁTICO y CINÉTICO

VII.1. CARACTERÍSTICAS DE LA FUERZA DE ROCE

Sabemos que no existe el movimiento perpetuo. Si observamos un cuerpo deslizándose sobre otro, tarde o temprano el cuerpo se detendrá a menos que exista una fuerza externa que lo mantenga en movimiento.

La interacción que ocurre entre las superficies en contacto de los dos cuerpos, tiende a detener el movimiento relativo y se denomina *fuerza de roce cinético*.

Un fenómeno similar ocurre cuando intentamos mover un cuerpo que está en *reposo*. Al aplicar una fuerza, notamos que el cuerpo no se mueve. Al aumentar la fuerza gradualmente, tampoco lo hace. Sólo cuando la fuerza aplicada alcanzar una cierta magnitud el cuerpo comienza a deslizar. Si mantenemos la fe en la segunda ley de newton, debe existir una fuerza que se origina en las dos superficies de contacto que impide el desplazamiento y por tanto no hay aceleración. Esta fuerza variable de interacción entre las superficies en reposo se denomina *fuerza de roce estático*.

Es difícil establecer una teoría acerca de la fuerza de roce entre superficies porque depende de muchas variables: de las propiedades de la superficie, como el pulido, la existencia de óxidos depositados en la superficie, naturaleza de los materiales, temperatura ... etc. También depende de la historia de las superficies: si los bloques han sido deslizados previamente o no. Todo esto hace aún más difícil cuantificar su efecto.

VII.1.1. Definición de Fuerza de roce

Las primeras investigaciones acerca de la fricción fueron realizadas por Leonardo da Vinci, hace 450 años atrás, pero nunca fueron publicadas y sólo se conocieron después que los investigadores franceses: Guillaume Amontons y Charles-Augustin de Coulomb, publicaron sus trabajos. Estos últimos propusieron *cuatro leyes* acerca del comportamiento de la fricción. Hoy sólo tres de ellas sobreviven, y su validez empírica en numerosas situaciones ha sido corroborada a través del tiem-

po.

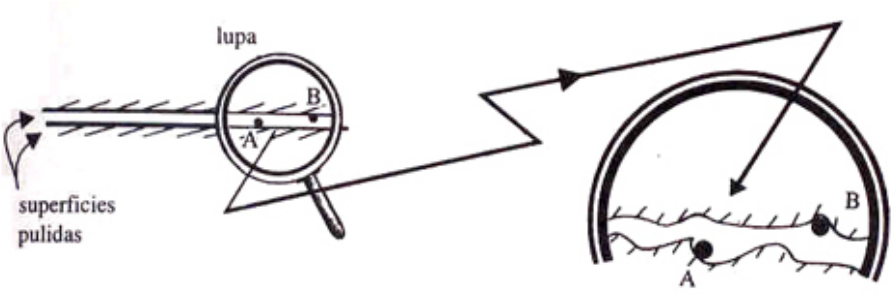


Figura VII.1: *Dos superficies, por suaves que parezcan al tacto, tienen irregularidades que pueden ser vistas mediante un microscopio. Una teoría asocia las fuerzas de roce entre dos superficies a las microsoldaduras que se originan en la superficie de contacto y a la resistencia al movimiento generada por estas irregularidades.*

Estas tres leyes son:

- La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal que ejerce el cuerpo sobre la superficie.
- La fuerza de fricción no depende del tamaño de las superficies en contacto.
- El coeficiente de fricción depende de las propiedades de las superficies que se deslizan.

La cuarta ley, que es incorrecta, afirmaba que el roce no dependía de la velocidad relativa de las superficies. Al final de este capítulo comentaremos acerca de la dependencia que existe entre la fuerza de roce y la velocidad y su aplicación al caso de las cuerdas de un violín y el origen del ruido que generan los goznes de las puertas.

Podemos aventurar que el *roce estático* se origina por la aparición de reacciones químicas entre las moléculas de ambas superficies que logran ubicarse muy cerca una de otra. Esta ligazón molecular genera microsoldaduras en determinados puntos de las superficies en contacto y es el origen de la fuerza de fricción estática que impide el desplazamiento relativo de dos cuerpos inicialmente en reposo. Al deslizar una sobre otra, se rompen estos vínculos, las moléculas quedan vibrando y disipan parte de su energía como calor, hecho que se puede constatar al tocar las superficies.

Una vez que las superficies comienzan a desplazarse entre ellas, estas aristas microscópicas se enganchan unas con otras y dan origen al *roce cinético*.

Todo este argumento es *cualitativo*. Las prescripciones que siguen a continuación no pueden tener el caracter de una ley fundamental de la naturaleza sino más bien un *resultado empírico*: una conclusión más o menos general que se obtiene después de realizar muchos experimentos. (Ver [4]).

Es ilustrativo transcribir el resumen del artículo (en inglés) [5]:
Nanotribología: El renacimiento de la fricción.
Transcurridos 500 años después de los primeros estudios acerca de la fricción, el concepto de super-lubricación, deslizamiento sin desgaste y el control de la fricción recién están siendo concretados en los laboratorios y se han transformado en predecibles mediante un modelamiento adecuado. El desafío ahora es construir un puente entre los procesos a escala microscópica y aquellos macroscópicos.
La fricción está presente en un gran número de sistemas físicos y juega un rol central en todas las escalas, desde las micro y nano-máquinas o motores biológicos moleculares hasta las escalas geológicas características de los terremotos. A pesar de la importancia práctica y fundamental de la fricción y los crecientes esfuerzos en este campo, muchos aspectos claves de la dinámica de este fenómeno no han logrados aún ser develados.

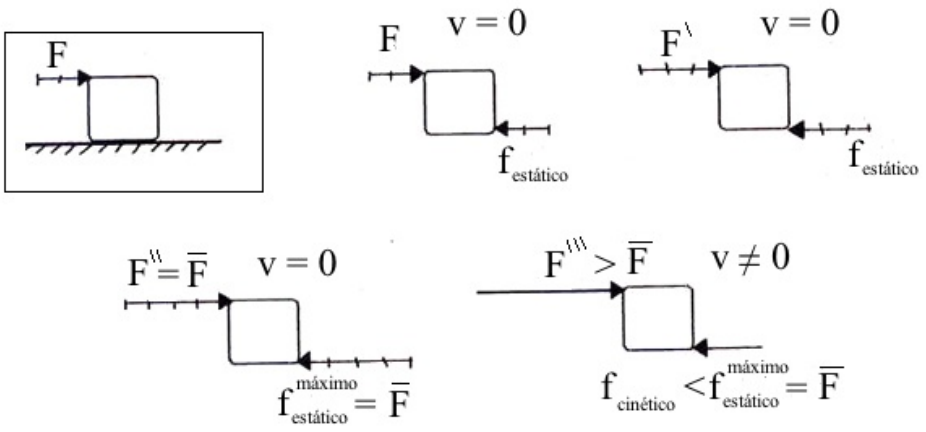


Figura VII.2: *A medida que la fuerza horizontal F aumenta en magnitud, también lo hace la fuerza de roce f, hasta que llega a su cota máxima F'. Cuando F se hace mayor que este valor F', el bloque comienza a moverse y el roce estático se transforma en roce cinético.*

Supongamos que tenemos un bloque descansando sobre el piso y que intentamos desplazarlo aplicando una fuerza horizontal **F** que la vamos incrementando lentamente. La fuerza de roce estático la designamos por **f**.

A continuación describimos la forma como actúa la fuerza de roce cuando intentamos deslizar un bloque sobre un piso.

a.- Cuando **F** varía desde 0 hasta un cierto valor **F'**, la fuerza de fricción también aumenta junto con ella, desde 0 hasta **F'**.

b.- Cuando **F = F**él bloque está a punto de comenzar a moverse. El valor de **F**és fijo y depende en forma complicada de todos los parámetros mencionados más arriba. Por ahora olvidamos este último comentario y suponemos que tiene un valor conocido y fijo.

c.- Al aumentar levemente el valor de **F**, es decir al hacer **F** $>$ **F'**, la fuerza de roce permanece constante **f = F'**, y el bloque comienza a moverse.

d.- Cuando **F** es mayor que **F'**y el bloque está en movimiento, la fuerza de roce disminuye **f ¡F'**. En la mayoría de los casos esta disminución es pequeña.

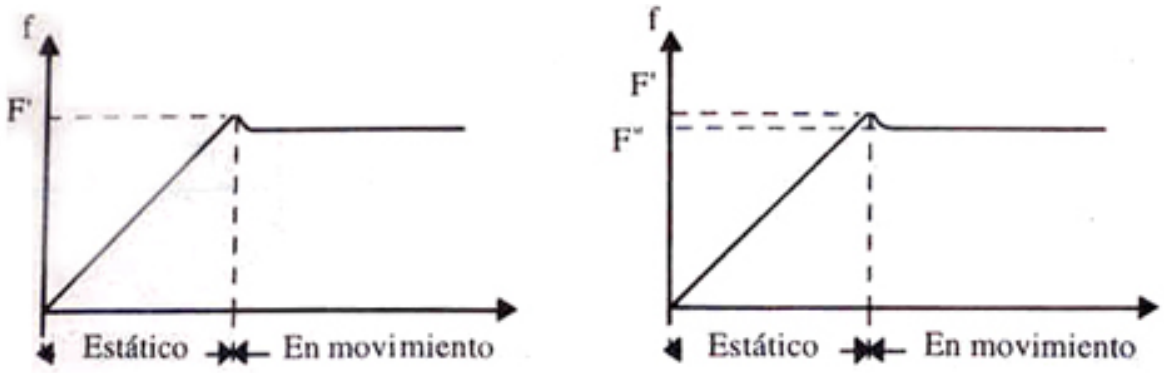


Figura VII.3: *Se incluye un gráfico con la magnitud de la fuerza de roce a medida que la magnitud de la fuerza externa aumenta. El equilibrio se rompe y, por tanto, el movimiento comienza cuando se alcanza el valor F'. En este intervalo la fuerza de roce disminuye y se estabiliza en el valor F", correspondiente al roce cinético.*

Nos queda por determinar el valor de F'. Adoptamos la ley de Coulomb para el roce en seco y definimos el valor de F' de la siguiente forma:

Definición

El valor de la fuerza de fricción $|\vec{F'}|$, es proporcional a la fuerza normal que se ejerce entre las superficies en contacto:

$$|\vec{F'}| = \text{Fuerza de fricción estática} \leq \mu_{est}\,|\vec{N}|, \tag{VII.1}$$

donde $\vec{N}$ es la fuerza normal entre las superficies y μ se denomina el *coeficiente de fricción*, y esconde nuestra ignorancia acerca del estado y características de las superficies en contacto que intervienen en el desplazamiento relativo.

Como se mencionó, existe un valor máximo para la fuerza de fricción estática y otro levemente menor para la fuerza de fricción cinética. Para distinguir ambos definimos un coeficiente de fricción cinético μ_c y otro estático μ_e.

$$\vec{F}_{roce} \equiv \mu_e \cdot |\vec{N}|\hat{t}, \tag{VII.2}$$

donde $\vec{F}_{roce}$ *representa la fuerza de roce que actúa en la dirección tangente a la superficie de contacto $\hat{t}$, y apunta en el sentido opuesto al movimiento relativo, en el caso de la fricción cinética y en el sentido opuesto a la fuerza aplicada, en el caso de la fricción estática.*

En resumen: El módulo de las fuerzas F' y F'', es proporcional al módulo de la fuerza normal a la superficie. El factor de proporcionalidad son los coeficientes de fricción estática en el primer caso y cinética en el segundo.

La dirección de la fuerza de roce es siempre tangente a la superficie de contacto y su sentido tiende a evitar el movimiento relativo.

Para sacar del reposo a un cuerpo debemos aplicar en forma tangencial una fuerza $F > F'$ y una vez en movimiento al menos una fuerza F'' para mantener su velocidad.

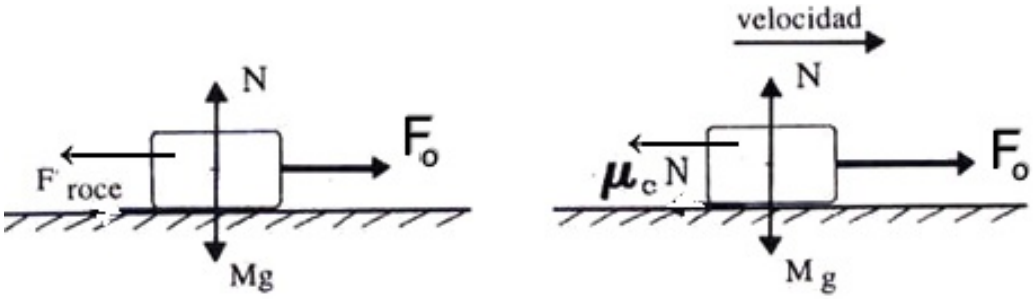


Figura VII.4: *Se muestra el diagrama de cuerpo libre y la definición de la fuerza de roce con el coeficiente de roce* **estático** *(antes de que se produzca el movimiento) y el roce* **cinético***, en el caso de un bloque deslizando sobre una superficie rugosa.*

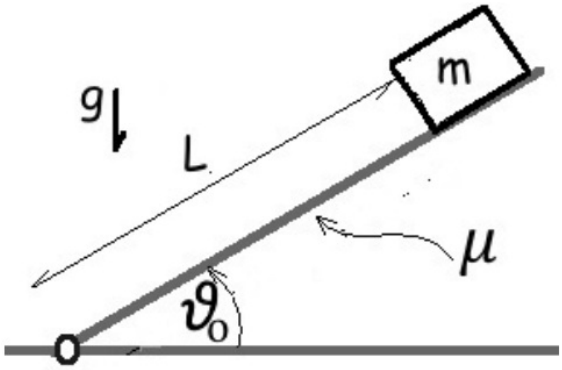
VII.2. EJEMPLOS RESUELTOS

Antes de resolver un problema, es importante tener presente qué se conoce: los datos del problema. Junto con ello debemos marcar las variables desconocidas que intervienen en el planteamiento. Al escribir las ecuaciones de Newton y las restricciones geométricas, balanceamos su número sabemos si podemos resolver el problema. Las ecuaciones deben ser iguales en número a las incógnitas.

Adicionalmente en los problemas en que interviene el roce debemos suponer, desde el inicio, el sentido que tendrá el movimiento, debido a que el roce siempre se opone al movimiento relativo entre dos superficies en contacto. Esta predicción asigna una dirección y sentido preciso a la fuerza de roce. Si las ecuaciones de movimiento señalan que el desplazamiento ocurre en sentido opuesto al elegido inicialmente, debemos volver al comienzo cambiando el sentido del movimiento relativo inicial y procediendo en la forma habitual.

Ejemplo

Considere un plano inclinado con un bloque de masa **m** instalado sobre su superficie. El roce entre el bloque y el plano se caracteriza por un coeficiente de roce estático μ_{est} y uno cinético μ_{cin}, cuyos valores desconocemos. El ángulo entre el plano y la superficie horizontal es variable y lo denominamos θ.

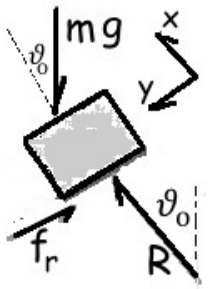


a.- Inicialmente el plano está sobre la superficie horizontal ($\theta = 0$), y lentamente lo comenzamos a inclinar. Una vez que el ángulo alcanza el valor θ_o, la masa **m** comienza a deslizar. Encuentre el valor de μ_{est} en función de **m**, **g** y θ_0.

b.- Si el bloque estaba a una distancia **L** del borde del plano y demoró τ segundos en alcanzar el punto más bajo: Encuentre el valor de μ_{cin} a partir de estos datos.
Suponga que desliza con el mismo ángulo θ_o en este caso.

SOLUCIÓN

a.- Como el coeficiente de roce μ es una variable dimensional, sólo puede depender del ángulo θ. No es posible formar una variable adimensional con **m**, **g** .
Suponiendo el caso crítico, donde **m** está en reposo pero a punto de comenzar a deslizar hacia la izquierda de la Figura, tenemos



$$m\,g\,\text{sen}\theta - f_r = 0, \quad \text{en el eje paralelo al plano inclinado,}$$

$$R - m\,g\,\cos\theta = 0, \ \text{en el eje perpendicular al plano inclinado.}$$

En el caso crítico, la fuerza de roce toma el valor

$$f_{r\,\text{máx}} = \mu_{\text{est}}\,R = \mu_{\text{est}}\,m\,g\,\cos\theta_o,$$

reemplazando este valor en la primera ecuación obtenemos

$$m\,g\,\text{sen}\theta_o = \mu_{\text{est}}\,m\,g\,\cos\theta_o, \ \Rightarrow \ \mu_{\text{est}} = \tan\theta_o$$

b.- Al menor cambio en el ángulo θ_o la masa comienza a deslizar hacia el piso debido que el coeficiente de roce cinético es menor que el estático.

Con las ecuaciones de Newton calculamos la aceleración que adquiere la masa **m** y con este valor podemos calcular cuánto se demora en alcazar el extremo y así poder evaluar el coeficiente de roce cinético.

Sólo debemos incluir la aceleración a la derecha de la ecuación inicial encontrada para el eje-y, en el punto anterior.

$$m\,g\,\text{sen}\theta_o - f_{r\,\text{cin}} \;=\; m\,a.$$

Reemplazando la expresión para el roce cinético, obtenemos:

$$m\,g\;\;\text{sen}\theta_0 - \mu_{\text{cin}}\,m\,g\;\cos\theta_o \;=\; m\,a,$$

despejando la masa en todos los términos tenemos

$$g\,\text{sen}\theta_o \;-\; \mu_{\text{cin}}\,g\;\cos\theta_o \;=\; a \;\;\Rightarrow\;\; a \;=\; g\cos\theta_o\,(\tan\theta_o - \mu_{\text{cin}})$$

Podemos comprobar que la aceleración a lo largo del plano se reduce a $g\,\text{sen}\theta_o$ cuando el coeficiente de roce es nulo $\mu \;=\; 0$. Suponiendo que parte del reposo y del origen de coordenadas, encontramos que, de acuerdo a la ecuación de la cinemática con aceleración constante se cumple

$$y \;=\; \frac{1}{2}\,a\,t^2,\;\text{ aplicado a nuestro caso }\; L \;=\; \frac{1}{2}\,g\cos\theta_o\,(\tan\theta_o - \mu_{\text{cin}})\,\tau^2$$

Despejando μ_{cin} obtenemos:

$$\mu_{\text{cin}} \;=\; \tan\theta_o \;-\; \frac{2\,L}{\tau^2\,g\;\cos\theta_o}$$

Esta expresión es particular dado que la masa se desliza con el ángulo crítico encontrado para determinar el coeficiente de roce estático. Se propone como ejercicio hacerlo para un ángulo mayor que θ_o,

¿Se obtendrá una expresión diferente? o es sólo cambiar el nuevo ángulo θ por θ_o.

¿Qué ocurre si la inclinación del plano es menor que el ángulo crítico θ_o, pero se le da una velocidad inicial $\mathbf{V}_o$?

□

Ejemplo

Considere el movimiento de dos masas unidas por una cuerda de masa despreciable. Una de ellas se desliza sobre un plano inclinado *con roce* y la otra cuelga del otro extremo de la cuerda que pasa por una polea.

En este problema suponemos conocidos: los valores de las masas, el coeficiente de roce cinético μ_c y el ángulo θ que forma el plano con el piso.

Se pide calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas **M** y **m**.

A través de la tensión transmitida por la cuerda, la masa **M** responde al movimiento de de la masa **m**. La polea del extremo no tiene roce y por lo tanto sólo cambia la dirección de la tensión.

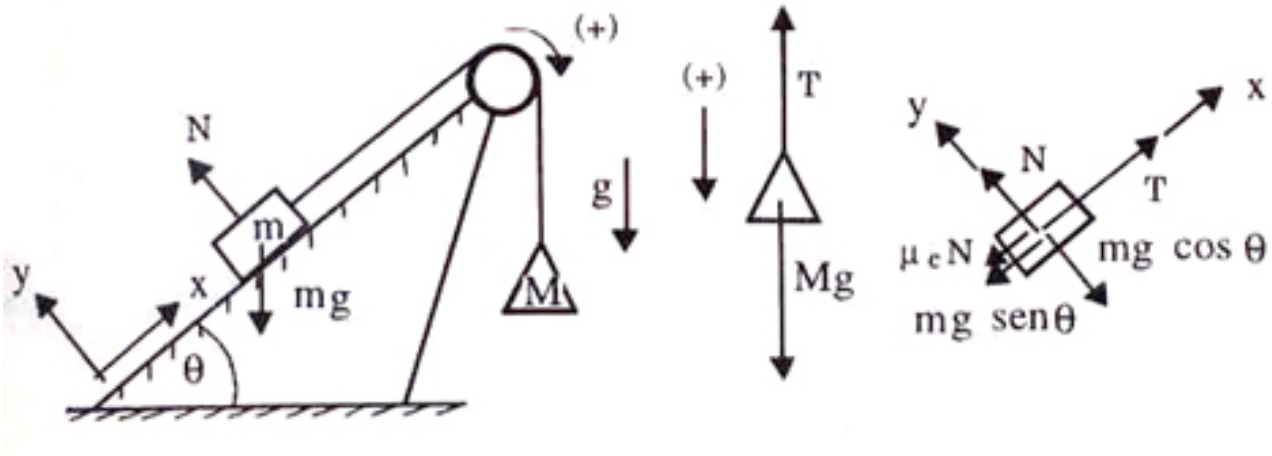


Figura VII.5: *A cada una de las masas le asociamos una fuerza que corresponde a su peso. Sobre m actúa la reacción del piso que se descompone en una fuerza normal al piso y otra tangente que identifica a la fuerza de roce.*

Como la cuerda es inextensible la aceleración de la masa **M** es la misma que la de **m**, sólo cambia su dirección.

Como ya establecimos cuáles son las conexiones entre **m** y **M**, procedemos a elegir el sistema de coordenadas que mejor se adapte al problema. Designamos como eje–x a la dirección paralela a la superficie del plano inclinado. El eje–y es, por supuesto, perpendicular. Como el bloque se desliza sobre esta superficie, sin saltar o hundirse, éste es un sistema de coordenadas muy conveniente para resolverlo.

Enseguida hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas. Para el primer bloque de masa m tenemos, en el *eje–y*:

$$1) \quad N - m\,g\cos\,\theta = 0,$$

De esta ecuación tenemos: $N = m\,g\,\cos\,\theta$.

Suponemos que la masa m remontará el plano en la forma indicada en la Figura. Si esta suposición es correcta, su ecuación de movimiento es:

$$2) \quad -\,\mu_c\,N - mg\text{sen}\,\theta + T = m\,a.$$

La ecuación de movimiento para M es:

$$3) \quad -\,T + M\,g = +M\,a.$$

Las incógnitas son N, T y a. Y como tenemos tres ecuaciones, de forma que podemos despejarlas.

De la ecuación 1) despejamos N y su valor lo incluímos en 2), obteniendo:

$$-\mu_c\, m\, g\, \cos\,\theta - m\, g\text{sen}\,\theta + T = ma$$

$$Mg - T = Ma$$

Sumando estas ecuaciones se cancela T y entonces podemos despejar la aceleración obteniendo:

$$a = \frac{M - m(\mu_c + \tan\,\theta)\cos\,\theta}{M + m}\, g.$$

Si la aceleración resulta ser negativa, debemos volver a las ecuaciones 1, 2 y 3 y plantearlas suponiendo que el movimiento se verificará en el sentido opuesto.

Como siempre, debemos comparar nuestros resultados con otros ya conocidos o con situaciones cuya solución es fácil de obtener.

Si el ángulo es $\theta = \pi/2$, entonces la aceleración está dada por:

$$a = g\frac{M - m}{M + m},$$

el mismo resultado obtenido para el sistema de las dos masas con una polea resuelto anteriormente.

Si m = 0, entonces $T = 0$ y $a = g$, que es lo esperado puesto que M estaría en ese caso en caída libre.

Si M = 0, entonces tenemos dos posibilidades: la masa m se desliza plano abajo o se queda en reposo. Esta situación es un caso particular de un ejemplo más complicado que discutimos a continuación.□

Ejemplo

Suponga conocido el coeficiente de fricción estática entre la masa m y la superficie del plano inclinado, en la misma configuración estudiada en el ejemplo anterior.

Encuentre el rango de valores de m para el cual el sistema permanece en reposo.

En el ejemplo anterior supusimos que el peso de la masa M lo hacía caer, arrastrando consigo a la masa m.

Ahora debemos considerar otra posibilidad: si m aumenta su valor puede primero, detener el movimiento en el sentido indicado en el ejemplo anterior y, si m sigue aumentando, quedar a punto de levantar la masa M.

Estudiemos ambos límites en forma separada.

a) *El valor mínimo de m para que el sistema permanezca en reposo.*

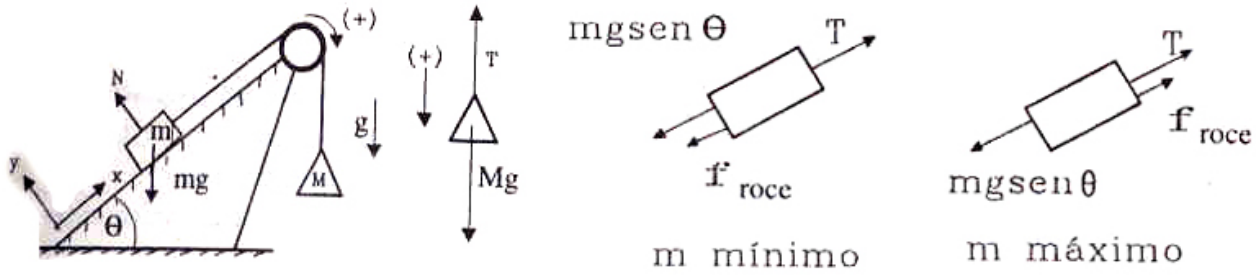


Figura VII.6: *La fuerza de roce se opone al inicio del movimiento hasta que alcanza un valor límite igual a μN. En el primer caso apunta hacia el vértice inferior del plano (m mínimo). En el segundo caso invierte su sentido.*

Como no hay movimiento, debemos usar el valor del coeficiente de fricción estática. Este apunta hacia el vértice inferior del plano inclinado. La masa M se encuentra a punto de caer.

Conservando el convenio de signos del ejemplo anterior, el diagrama de cuerpo libre nos da la siguiente ecuación:

$$0 = -f_{\text{roce est.}} + T - m\,g\,sen\,\theta.$$

Como no existe aceleración, el diagrama de cuerpo libre para M es directo: $T = M\,g$.

También, como estamos analizando el caso en el que m es *mínimo*, la fuerza de roce debe alcanzar su mayor valor: $f_{\text{roce est.}} = \mu\,m\,g\,\cos\,\theta$, puesto que $m\,g\,\cos\,\theta$ es la fuerza normal que actúa sobre el plano. Reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$0 = -\mu\,m\,g\,\cos\,\theta + M\,g - m\,g\,sen\,\theta,$$

$$m_{\text{mínima}} = \frac{M}{\cos\,\theta\,[\mu_e + \tan\,\theta]}.$$

Siempre existe un valor finito de m que puede sostener la masa M. El coeficiente de roce estático μ_e, contribuye a disminuir el valor mínimo de m necesario para sostener M.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $m = M$ es la única solución, puesto que en este caso la fuerza normal sobre el plano es nula y por lo tanto no hay roce.

b) *El valor mínimo de m para iniciar el movimiento del sistema.*

El diagrama de cuerpo libre es similar al anterior con la excepción del sentido que adopta la fuerza de roce estático. Como el cuerpo m está a punto de comenzar a deslizar hacia abajo, la fuerza de roce apunta hacia el vértice superior del plano inclinado. Conservando la convención de signos del caso anterior, tenemos:

$$0 = +\mu\,m\,g\,\cos\,\theta + M\,g - m\,g\,sen\,\theta,$$

$$m_{\text{máximo}} = \frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta - \mu_e]}.$$

Este resultado tiene sentido sólo si $\mu_e < \tan\,\theta$: la masa m no puede ser negativa.

El caso $\mu = \tan\,\theta$ cobra sentido si $M = 0$. Este refleja la situación en la cual m permanece en reposo debido únicamente a la fricción estática con el piso.

En resumen, el sistema permanecerá en reposo si la masa m toma un valor entre:

$$\frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta - \mu_e]} \geq m \geq \frac{M}{\cos\,\theta\,[\tan\,\theta + \mu_e]}.\Box$$

Ejemplo

Obtener el valor *mínimo* de la fuerza F_0 para que m no deslice por el borde del bloque M (Figura [VII.7]).

Suponga conocidos los valores del coeficiente de roce estático entre ambos bloques, $\mu_{1\,e}$, el roce cinético entre la masa M y el piso $\mu_{2\,c}$, y los valores de las masas m y M, que se indican en la Figura [VII.7].

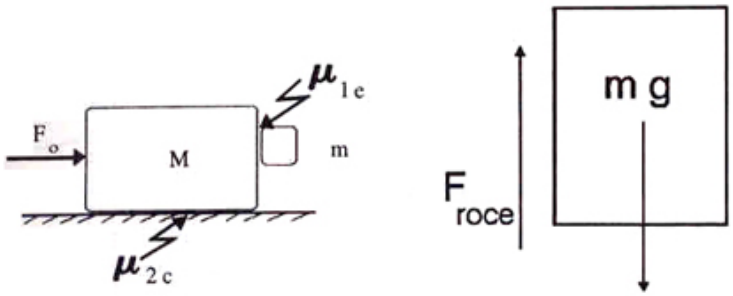


Figura VII.7: *Aquí debemos aplicar una fuerza de reacción normal (en este caso una fuerza horizontal) de una magnitud tal que la fuerza de roce estático, no permita caer al bloque m. Se acompaña el diagrama de cuerpo libre de la masa m.*

Comenzamos examinando la componente horizontal de las fuerzas que actáun sobre todo el sistema (las masas M y m) para obtener una ecuación para F_0. Junto a ella aparece la aceleración a_0, que tampoco conocemos. (Dos incógnitas y una ecuación),

$$F_0 - \mu_{2\,c}(M + m)g = (M + m)a_0.$$

Para obtener más ecuaciones debemos analizar el diagrama de cuerpo libre de m. Su componente horizontal da la siguiente ecuación:

$$R = m\,a_0,$$

donde $\vec{R}$ es la fuerza que ejerce el bloque M sobre m. Incluimos otra ecuación, pero ésta trajo una nueva incógnita: R.

La ecuación de Newton para la componente vertical envuelve al roce estático, sin embargo como nos piden el *valor mínimo* de la fuerza F_0 para que m no caiga, usamos entonces *el valor máximo de la fuerza de roce*. La ecuación es:

$$\mu_{1\,e}\,R - m\,g = 0.$$

Aquí hemos supuesto, al igual que en la ecuación anterior, que la masa m *no desliza*. Por eso hemos podido usar $(M + m)\,g$, como la fuerza normal actuando sobre el piso . Si la masa m estuviera cayendo, la fuerza normal sobre el piso sería $M\,g + \mu_{1e}\,R$. En otras palabras, $\mu_{1e}\,R$ es igual a $m\,g$, sólo si la aceleración de la masa m es nula.

Volviendo al problema: ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: R, a_0 y F_0. Podemos entonces resolver el problema.

Despejando a_0 de las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$a_0 = \frac{g}{\mu_{1\,e}},$$

reemplazando este valor en la última ecuación, obtenemos:

$$F_0 = (M + m) \cdot g \cdot \left[\mu_{2\,c} + \frac{1}{\mu_{1\,e}}\right].$$

Verifiquemos si esta ecuación reproduce los resultados esperados en los casos límites. Si $\mu_{1\,e}$ es muy pequeña, la fuerza para mantener m en su lugar, debe ser apreciable, tal como se desprende de las ecuaciones.

También se deduce que si no existe roce entre el piso y el bloque: $\mu_{2\,c} = 0$, entonces necesitamos una fuerza F_0 menor para mantener el bloque de masa m en reposo.

Ejemplo

Un bloque se desplaza con una *velocidad constante* V_1 sobre un plano horizontal bajo la acción de una fuerza F_1, también constante. El coeficiente de roce cinético entre ambas superficies es μ_c.

En un cierto instante le damos un golpecito lateral y posteriormente le aplicamos una fuerza constante F_2 –sin dejar de aplicar la fuerza F_1–, de forma que adquiera una componente *adicional* de velocidad V_2, *constante* y perpendicular a V_1.

Calcule el valor de la fuerza F_2 necesaria para comunicar al bloque esta velocidad adicional V_2. Suponga V_1 y V_2 conocidos.

Como el bloque se mueve con velocidad constante, la fuerza que debemos ejercer: $F_1 + F_2$, para mantener el movimiento debe ser constante, y su dirección y sentido, coincidir con el vector suma de velocidades $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.

En cuanto a su magnitud, ésta debe ser la misma que la fuerza de roce cinético $\vec{f}$ pero, obviamente, en sentido opuesto.

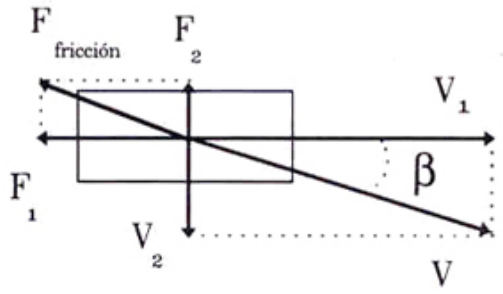


Figura VII.8:

Para mantener la velocidad constante las fuerzas F_1 y F_2 deben tomar los siguientes valores:

$$F_1 = f_{\text{cinética}} \cos\beta, \quad \text{y} \quad F_2 = f_{\text{cinética}} \,\text{sen}\,\beta.$$

De la figura sabemos que $\tan\beta = \frac{V_2}{V_1}$ y de la trigonometría usamos la siguiente igualdad:

$$sen\,\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}, \qquad \text{de aquí tenemos:}$$

$$F_2 = f_{\text{cinética}} \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}.$$

Si la velocidad V_2 es muy pequeña, entonces $sen\,\beta \approx \tan\beta$, y reemplazando el valor de la fuerza de fricción, obtenemos:

$$F_2 = \mu_c\, M\, g\, \frac{V_2}{V_1}.$$

M es la masa del bloque, la que suponemos conocida.□

Es interesante analizar este resultado. Si la velocidad V_2 es muy pequeña comparada con V_1, entonces F_2, la fuerza necesaria para desviar a un objeto que resbala en la dirección de la velocidad V_1 es también pequeña.

Cuando intentamos sacar un clavo y lo tiramos haciéndolo girar en uno y otro sentido, podemos razonar que al girarlo y tirarlo estamos disminuyendo la fuerza neta requerida para sacarlo. Resulta más fácil. Esta misma estrategia se repite al proceder a sacar el corcho de un espumante, al instalar una conexión en una manguera de regadío... Esta operación se realiza para disminuir la fuerza necesaria para extraer o instalar el objeto.

Conviene analizar esta afirmación. Obviamente el hecho de girarlo puede generar un aumento de la temperatura entre el clavo y la madera y también un cierto desgaste que facilita la extracción. Es evidente que la operación depende de otros parámetros que no se consideran aquí. Queda abierta la evaluación de los factores que son más relevantes. Sin embargo, es interesante conectar este problema con las situaciones señaladas.

VII.2.1. Fuerza de Fricción y Velocidad Relativa.

Existen muchos casos donde la interacción entre un objeto: un paracaidista, una pelota de tenis, una bala, una gota de lluvia, una hoja de árbol...y el medio donde se desplaza, la atmósfera por ejemplo dependen de la velocidad relativa. Es conocido el ejemplo de un paracaidista en caída libre. Su velocidad no crece permanentemente, alcanza una velocidad terminal debido a la resistencia del aire. Lo mismo ocurre con una gota de agua de lluvia.

En el caso del aire se consideran dos regímenes:

– bajas velocidades donde fuerza que caracteriza la resistencia del aire es proporcional a la velocidad relativa al medio **V**, $F_{res} = bV$, donde **b** es una constante con dimensiones de [M/T].

– A velocidades más altas la dependencia es proporcional al cuadrado de la velocidad $F_{res} = cV^2$, donde **c** tiene dimensiones de [M/L].

Veamos cómo funciona esta fuerza en el caso más común de caída libre. Como lo resolveremos cualitativamente no especificaremos cuál de las dos fuerzas definidas incluiremos.

Supongamos un objeto comienza a caer libremente desde una cierta altura. Suponemos que la caída es vertical. Recordando que, a diferencia de los casos estudiados hasta ahora, incluiremos una fuerza que depende de la velocidad escribimos la ecuación de movimiento convenientemente

$$m\,\frac{dV}{dt} = m\,g - F_{res}. \tag{VII.3}$$

Si el objeto simplemente se suelta, la velocidad inicial es nula y la evolución *cualitativa* de las fuerzas y velocidades está indicada en la figura.

(Extraído de: http://www.fas.harvard.edu/ scphys/nsta/lab2.pdf)

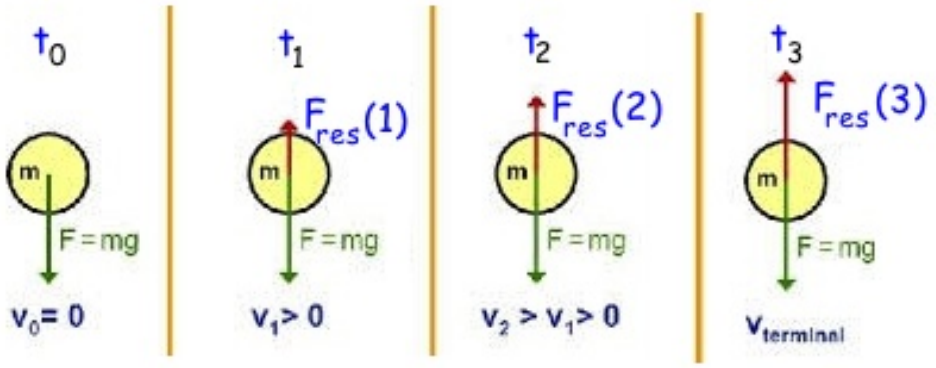


Figura VII.9: *Se ilustra la evolución de las fuerzas y el origen de la velocidad terminal del objeto en su caída en la atmósfera debido a la resistencia del aire. En t_3 la resistencia del aire $\mathbf{F}_{res}$ tiende asintóticamente a mg, y la aceleración va desapareciendo y la velocidad casi permanece constante, aumentando cada vez menos. Tiende a la velocidad terminal.*

Inicialmente la velocidad es nula y corresponde al caso ilustrado en la Figura con t_o. El peso acelera la masa y el objeto comienza a caer. Adquiere una velocidad y el diagrama de fuerzas

corresponde al instante t_1. Enseguida la fuerza neta hacia abajo está disminuida por la fuerza de resistencia del aire proporcional a la velocidad, de manera que la aceleración es más pequeña y el aumento de la velocidad es menor que el caso anterior. Corresponde al cuadro t_2. Finalmente la resistencia del aire alcanza la magnitud del peso y la aceleración entonces es nula, la velocidad no aumenta y hemos alcanzado la velocidad terminal en t_3.

En la ecuación VII.3 la masa no se puede eliminar. La expresión para la resistencia del aire está dad por la expresión

$$F_{res} = \frac{1}{2}\,\rho_{atm}\,A\,C_D\,V^2, \tag{VII.4}$$

donde ρ_{atm} es la densidad de la atmósfera (o en otro caso, el fluido por el cual se desplaza el objeto), **A** es el área con la cual se enfrenta a la atmósfera y $\mathbf{C}_D$ representa las complicaciones que surgen del comportamiento de la atmósfera debido al movimiento del cuerpo. Está claro la dependencia de la densidad en la fuerza de resistencia: caminar en un piscina es más difícil que en el aire. Lo mismo ocurre con el área. Los vehículos, los velocistas incluso los camiones instalan dispositivos o adoptan posiciones para disminuir el área efectiva que presentan a la resistencia del aire. El área del paracaídas es otro ejemplo directo.

La dependencia lineal de la resistencia del medio en la velocidad tiene un rango de aplicaciones más limitado. Es válido por ejemplo para velocidades muy bajas u objetos de un diámetro muy pequeño como una gota de agua en una nube cuyo diámetro es de 10^{-5}m.

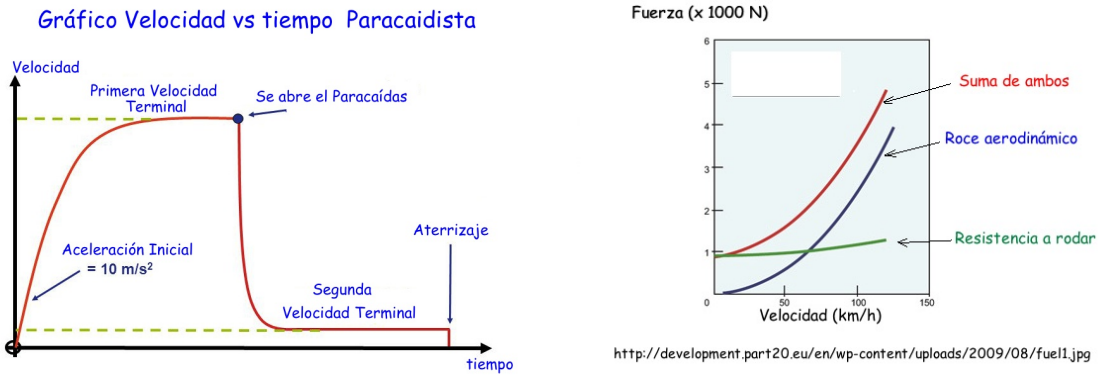


Figura VII.10: A la izquierda se incluye un gráfico de la velocidad versus tiempo para el caso del salto de un paracaidista. Tiene dos etapas, la primera sin paracaídas donde alcanza una velocidad Terminal y el segundo, con el paracaídas abierto donde alcanza una segunda velocidad terminal. A la derecha se incluye un gráfico de la fuerza de resistencia del aire y del piso en el caso de un automóvil. Se aprecia que la resistencia aerodinámica depende del cuadrado de la velocidad del automóvil.

Valores típicos de velocidades terminales son 55 m/s ó 195 km/h para un salto desde un avión antes de abrir el paracaídas. Es interesante cuantificar la evolución de la velocidad: en aproximadamente 3 segundos alcanza el 50 % de su velocidad terminal, a los 8 segundos adquiere el 90 % y a los 15 segundos el 99 %. Si el individuo al saltar adopta una posición más favorable puede

alcanzar velocidades terminales de 320 km/h ó 90 m/s. Esta es la misma velocidad de un halcón cuando se lanza en picada sobre su presa. Una bala de 150 gramos disparada al aire, puede alcanzar esa misma velocidad en su retorno al caer a tierra. Es mortal.

Las gotas de lluvia tienen velocidades terminales desde aproximadamente 2 m/s las gotas más pequeñas de alrededor de 0.5 mm de diámetro (llovizna) hasta 9m/s las gotas más grandes que no superan los 4 mm. No hay gotas de agua más grandes porque en su caída y por la acción de la resistencia del aire se dividen en tres o más gotas.

(Ref.: www.shorstmeyer.com).

Ejemplo

Considere un esquiador deslizando a lo largo de una pendiente para realizar un salto. En su trayecto procura disminuir la resistencia del aire. Dada su masa, coeficiente cinético de roce entre el esquí y la nieve y el ángulo α de la pendiente, encuentre la dependencia de la velocidad terminal en los parámetros indicados.

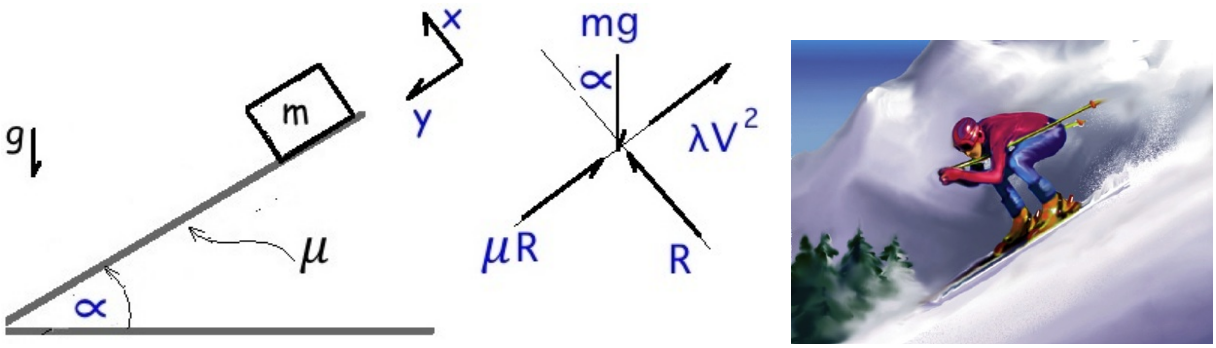


Figura VII.11:

Solución

A partir del DCL del esquiador encontramos las ecuaciones de movimiento:

En la dirección positiva del eje **y**, se tiene:

$$m\,\frac{d\,V}{d\,t} \;=\; -\lambda\,V^2 \;-\; \mu\,R \;+\; m\,g\,\text{sen}\alpha.$$

En la dirección **x**, perpendicular al plano:

$$R \;-\; m\,g\,\cos\alpha = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} m\,\frac{d\,V}{d\,t} &= -\lambda\,V^2 \,+\, m\,g\,(sen\alpha \,-\, \mu\,\cos\alpha), \\ m\,\frac{d\,V}{d\,t} &= -\lambda V^2 \,+\, m\,g\,\cos\alpha(\tan\alpha - \mu), \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{\lambda}{m}\,V^2 \,+\, g\,\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu). \end{aligned}$$

Obviamente para que este deporte tenga sentido, las superficies en contacto (nieve y esquí) deben ser preparadas de forma que $\tan\alpha >> \mu$.

La solución de esta ecuación es similar al gráfico incluido a la izquierda de la Figura VII.10. Acá no existe un frenado por la apertura del paracaídas de manera que la solución comprende el tramo hasta Primera Velocidad Terminal.

La explicación es como sigue: cuando V = 0, al comienzo, d V/d t aumenta a una razón g $\cos\alpha(\tan\alpha-\mu)$, ΔV es positivo y al final de un intervalo pequeño V es diferente de cero. Dado los signos relativos, en el siguiente intervalo d V/d t aumenta, pero ahora más lentamente...la pendiente es menor, y así sucesivamente, V aumenta una cantidad menor con cada nuevo intervalo , entonces hasta que la velocidad tiende a alcanzar un valor, que denominamos la Velocidad Terminal.

En ese instante tenemos

$$\frac{d\,V}{d\,t} \,=\, 0,\; \Rightarrow\; \lambda\,V^2_{terminal} \,=\, m\,g\,\cos\alpha(\tan\alpha - \mu),$$

reemplazando la constante λ por su expresión indicada en VII.4 obtenemos la dependencia de la velocidad terminal en función de sus parámetros para este caso

$$V^2_{terminal} \,=\, \frac{2\,m\,g\,\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)}{\rho_{atm}\,A\,C_D}. \qquad \text{(VII.5)}$$

Se requiere mayor información acerca de C_D para saber la real dependencia de la Velocidad Terminal.

Este valor es estable, si por cualquier razón externa la velocidad aumenta, el término del roce del aire la vuelve a su valor original. El inverso es también cierto: si disminuye la Velocidad el otro término de la ecuación dinámica, con su signo positivo, tiende a aumentar la velocidad. Lo que cambia la situación es -en el caso del paracaidista-, incorporar una nueva fuerza a la ecuación, que definitivamente la frena y disminuye su velocidad.

Otros ejemplos: Consumo de auto y el arco de un violín.

El roce es un problema central en otros caso como en el del corte de un material mediante un disco. También lo es en el consumo de automóvil. En este caso se trata de evitar la formación de turbulencias y es por eso que a máscara de los autos son todas similares.

Otro caso interesante pero que escapa al objetivo de estos apuntes, es el roce que ocurre entre el arco de un violín y la cuerda y cómo éste pone a vibrar el instrumento entero y genera una serie de armónicos. En la fricción del arco y la cuerda se distinguen dos etapas: una en que ambos se desplazan juntos y otra donde la cuerda resbala con respecto a los pelos del arco.

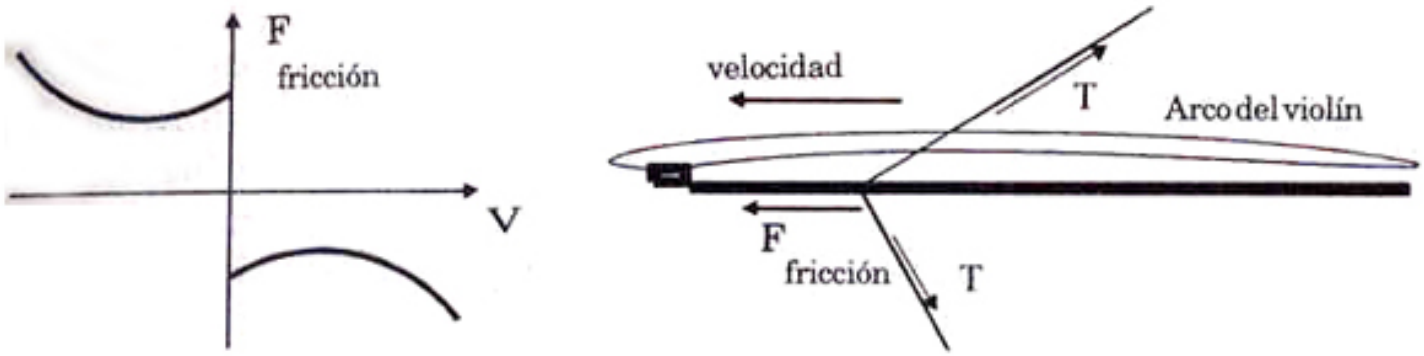


Figura VII.12: *A la izquierda aparece un modelo ilustrativo del movimiento de la cuerda: inicialmente se mueve con el arco, hasta que súbitamente, se despega del arco y vuelve a una posición donde es capturada por el arco y comienza nuevamente a moverse con el arco. Esta es la excitación externa del violín. En el medio se gráfica la amplitud de las diferentes frecuencias que produce el violín como un todo. A la derecha aparece las fuerzas entre el arco y la cuerda.*

VII.3. EJERCICIOS

1.– Un bloque de masa $\mathbf{m}_1$ **= 100 kg** es arrastrado a lo largo de una superficie sin roce, con una fuerza F_0, de modo que su aceleración es de **6 m/s**^{2} respecto al suelo.

Otro bloque $\mathbf{m}_2$ **= 20 kg** se desliza por sobre el primer cuerpo de 100 kg, con una aceleración de 4 m/s^2, referida al piso.

a.- ¿Cuál es la fuerza de roce ejercida por la masa m_1 sobre m_2?

b.- ¿Cuál es la fuerza neta sobre el cuerpo de masa 100 kg?

c.- ¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$?

d.- Después que el cuerpo de 20 kg se desliga del cuerpo de 100 kg. ¿Cuál es la aceleración del cuerpo de 100 kg?

e.- ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético entre los bloques?

2.– Dos bloques de masa **m** y **M** están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura: con **m** sobre el plano inclinado, liso y **M** colgando verticalmente). El bloque de masa **m**, sube con una aceleración cuya magnitud es $29/5$ [m/s^2].

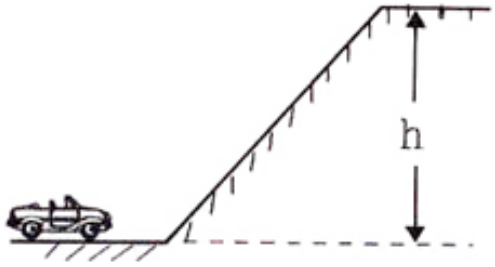
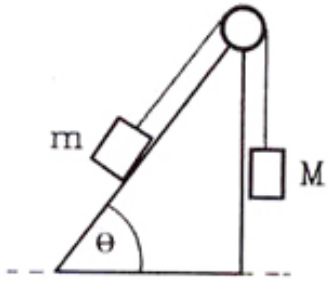


Figura VII.13: Problema # 1



Problema # 2

Si a continuación se invierten las posiciones (**M** se coloca sobre el plano y **m** cuelga verticalmente) el cuerpo de masa **M** también sube pero con aceleración de magnitud 9/10 [m/s^2]. Determine:

a.- El valor del ángulo θ.

b.- La razón entre las masas: **m/M**.

c.- ¿Qué ocurriría si consideramos el roce en la superficie inclinada?

3.– Se arrastra un carro de masa **m** sobre una superficie rugosa con un coeficiente de roce cinético μ, entre las dos superficies (ver Figura).

Calcule el valor de la fuerza con que se debe tirar el carro en función del ángulo θ de la figura. Se desea que el carro se desplace con rapidez constante.

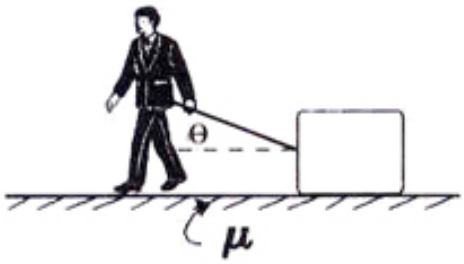
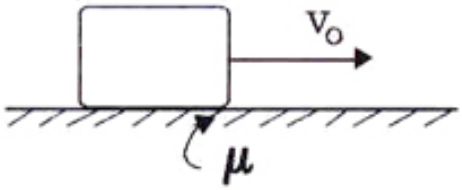


Figura VII.14: Problema # 3



Problema # 4

4.– Un objeto de masa **m** comienza a desplazars con una velocidad V_0, sobre una superficie rugosa con un coeficiente de roce cinético conocido μ.

a.- Obtenga la aceleración del objeto, después de adquirir esta velocidad inicial.

b.- ¿Cuánto tarda en detenerse?

5.– El bloque **B** de masa **m** parte del reposo desde el extremo superior del plano inclinado, que permanece fijo a la Tierra. Después de desplazarse una distancia **D** sobre el plano inclinado,

el cuerpo lleva una velocidad igual al 50 % de la velocidad que hubiera adquirido si el roce con el plano fuera nulo.

Encuentre una expresión para el coeficiente de roce μ entre el plano y la masa **B**, en función de θ.

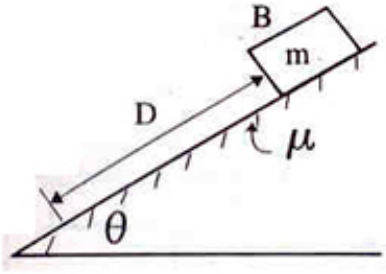
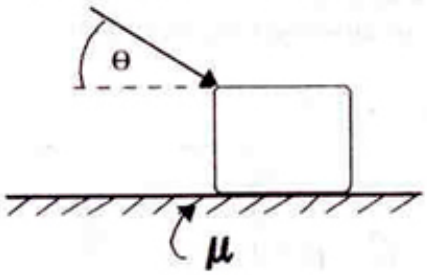


Figura VII.15: Problema # 5



Problema # 6

6.– Un objeto de masa m se encuentra en reposo sobre un plano rugoso (de coeficiente de roce estático μ_e y cinético μ_k). Se intenta moverlo aplicando una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal.

Encuentre el tamaño de la fuerza mínima (F_{min}) que es necesario realizar para mover el objeto.

7.– La cuña lisa de masa M, se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal F. Sobre ella se coloca un bloque de masa m.

a) Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.

b) Determine el valor que debe tomar la fuerza aplicada F, para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña. Suponga que no existe roce entre los bloques.

c) Ahora considere la existencia de roce sólo entre ambos bloques. (No existe roce entre la cuña y el piso). Calcule el valor máximo y el mínimo que debe tomar F, para el bloque no resbale sobre la cuña. Suponga los coeficientes de roce estático y cinético conocidos.

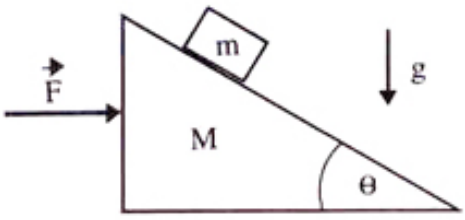
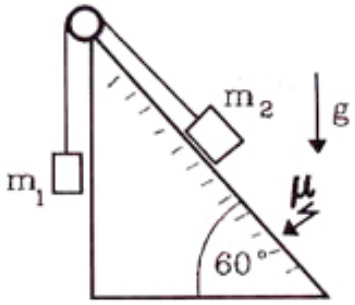


Figura VII.16: Problema # 7



Problema # 8

8.– El plano inclinado de la Figura forma un ángulo de $60°$ con la horizontal y es rugoso.

El bloque m_1 y el bloque m_2 se encuentran detenidos, obtenga el valor de la tensión de la cuerda y la fuerza de roce.

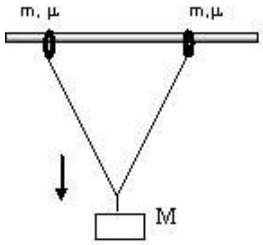


Figura VII.17: *Problema 9* .

9.– Dos anillos de igual masa m soportan una masa M como se indica en la Figura. El coeficiente de roce estático entre los anillos y la barra horizontal es $\mu_{\text{estático}}$. Los anillos se unen al bloque de masa **M** mediante una cuerda ideal de longitud **L** y masa despreciable.

a.- Calcule la *máxima* separación horizontal que se puede establecer entre los anillos para que éstos permanezcan inmóviles debido al roce estático entre los anillos y la barra.

b.- Suponga que el aro de la derecha está hecho de un material diferente y por tanto tiene un coeficiente de roce estático $\mu_{\text{estático}}$ mayor que el aro ubicado a la izquierda de la masa **M**. ¿Cuál es la nueva configuración que adquiere el sistema? ¿O permanece igual al caso a.-? Si piensa que toma una nueva configuración, calcúlela. Si piensa que no hay cambio, explique la razón física de esto.

10.– Las fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}_0$ aplicadas en las cuñas de los extremos (ver Figura) impiden que la masa **M** toque el piso. La masa **M** se amolda con sus ángulos de corte a las cuñas. El ángulo de las cuñas es θ, igual en ambas.

Suponiendo que el roce entre las superficies en contacto (**M** y las cuñas) es μ, ¿Cuál debe ser el valor de $\mathbf{F}_o$, para que la masa **M** permanezca fija? Despreciamos el roce entre el piso y las cuñas.

Supongamos esta otra situación: el roce entre las cuñas y la masa **M** es muy pequeño comparado con el roce entre las cuñas y el piso. Suponga que el roce entre la cuña y el piso es

numéricamente el mismo que en el caso anterior. ¿En cuál de los dos casos la fuerza necesaria para mantener fija a la masa **M** es menor?

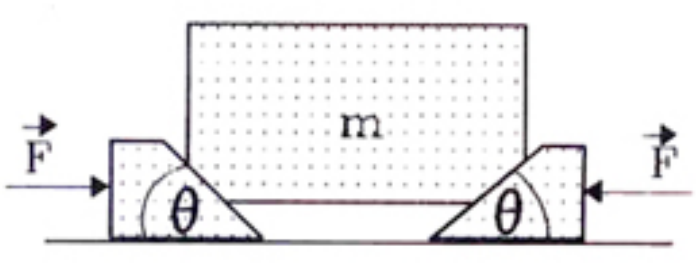
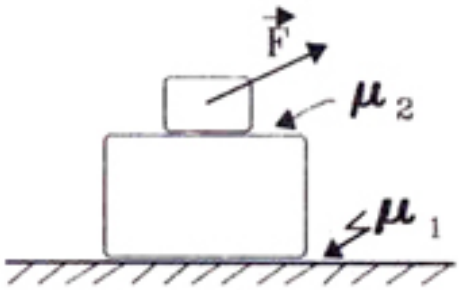


Figura VII.18: Problema # 10



Problema # 11

11.– Se tiene un bloque de masa M y sobre él un paquete de masa m. Sobre dicho paquete se aplica una fuerza **F**. Entre el bloque y el piso existe un coeficiente de roce μ_1 y entre el paquete y el bloque el coeficiente es μ_2.

¿Qué inclinación debemos darle a la fuerza **F** de modo que la tabla esté a punto de moverse cuando el paquete sobre la tabla comience a moverse?

12.– El plano inclinado forma un ángulo de 60° con la horizontal. Está fijo a la Tierra y posee un coeficiente de roce cinético μ. El bloque m_1 desciende con una *aceleración* cuyo valor es la mitad del valor que tendría en el caso que no consideráramos el roce entre las superficies. Calcule el coeficiente de roce cinético si $m_1 = 2\,m_2$ y confeccione un diagrama de cuerpo libre para ambas masas.

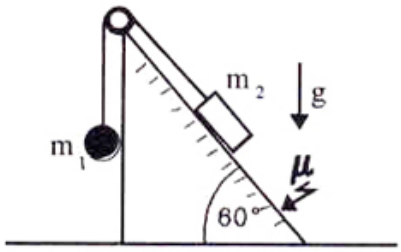


Figura VII.19: Problema # 12

13.– Un objeto de masa m, se mueve con rapidez V_0 sobre una superficie sin roce y al final de su camino logra entrar en el tablero horizontal de un trineo de masa M, que se puede mover sin roce sobre el hielo. El coeficiente de roce entre este objeto y el trineo es μ. El objeto se desliza sobre el trineo hasta que finalmente queda en reposo, *con respecto al trineo*.

a) ¿Cuál es la velocidad del conjunto, una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo?

b) ¿Cuánto tiempo demora el paquete, en quedar en reposo con respecto al trineo?

c) ¿Qué distancia recorre la masa m sobre M antes de detenerse sobre ella?

Indicación: Cuando el objeto se desliza sobre el trineo su aceleración no es la misma que la del trineo.

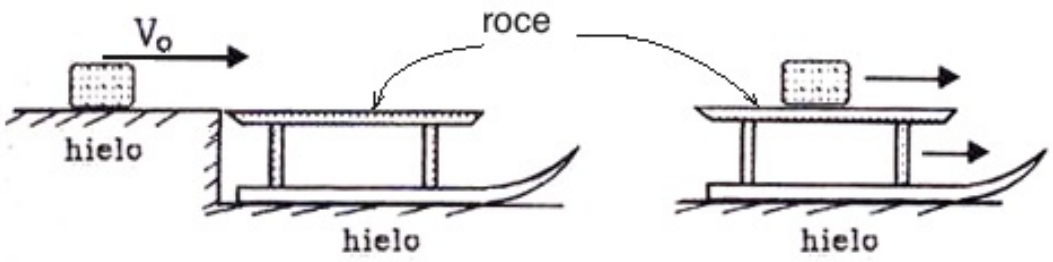


Figura VII.20: Problema # 13

14.– Con dos bloques A y B, se arman las configuraciones I y II que se indican en la Figura. Las cuerdas y poleas que se usan tienen masas despreciables y las masas $\mathbf{m}_A$ y $\mathbf{m}_B$ cumplen la siguiente relación: $\mathbf{m}_A = 2\,m_B$.

La magnitud de las fuerzas aplicadas F_I y F_{II} es tal que el bloque **A** se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cuociente entre el módulo de F_I y F_{II}.

El coeficiente de roce es constante, vale μ y es el mismo entre todas las superficies en contacto.

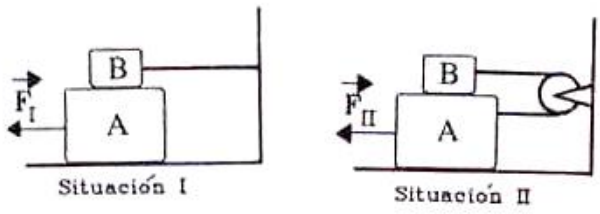
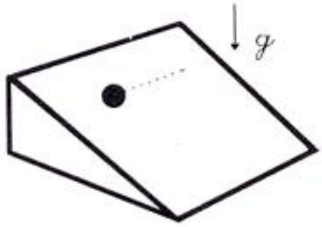


Figura VII.21: Problema # 14



Problema # 15

15.– Un pequeño cubo de masa m se ubica sobre un plano inclinado con un ángulo α. El coeficiente de fricción cinética entre el cubo y la superficie es $\mu_c = 2\,\tan\,\alpha$.

Encuentre el mínimo valor de la fuerza *horizontal* que es necesario aplicar para comenzar a mover el cubo.

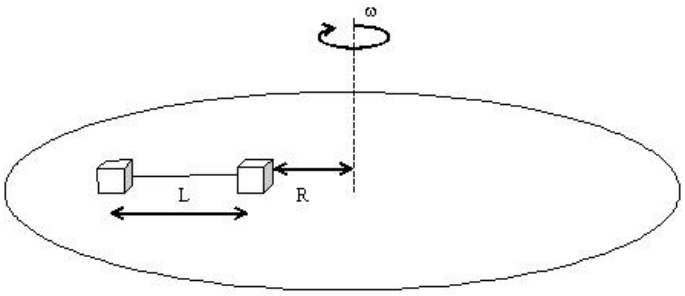
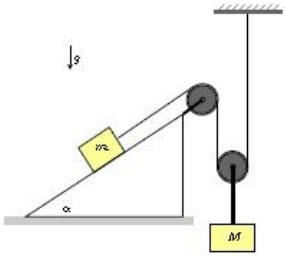


Figura VII.22: *Dos masas en disco rotando.*



16.– Dos bloques, ambos de masa **m**, están atados por una cuerda de largo **L** y descansan sobre un disco plano que gira con velocidad angular constante en torno a su eje. El roce entre la masa $\mathbf{m}_1$ (la más externa) y el disco es despreciable, pero no así entre la masa $\mathbf{m}_2$ (la cercana al eje de giro) y el disco. El coeficiente de roce estático entre $\mathbf{m}_2$ y el disco es μ_{est}.
Con el disco girando, ambas masas permanecen en reposo y dispuestas en forma radial, como se aprecia en la figura. En esta condición $\mathbf{m}_2$ se ubica a una distancia **R** del eje de rotación. Calcule la velocidad angular crítica ω para la cual la masa $\mathbf{m}_2$ esté a punto de resbalar sobre el disco.

17.– Considere una cadena de largo **L** cuya masa por unidad de largo es λ. Si ubicamos parte de la cadena en el borde de una mesa cuya superficie tiene un coeficiente de roce con la cadena μ: ¿Cual es el valor mínimo que debe tener el largo ℓ para que el resto de la cadena que cuelga, no pueda arrastrar a la que está sobre la mesa y caiga?. ℓ es el largo de la cadena que permanece sobre la mesa.

18.– Si colocamos una cadena de largo **L** apoyada -a modo de puente colgante-, en dos mesas separadas por una distancia **D** con $\mathbf{D} << L$: ¿Cuál debe ser el largo mínimo de la cuerda para que se sostenga con el roce entre la cadena y la superficie de la mesa. El coeficiente de roce entre ambos cuerpos es μ.

19.– Un bloque de masa **M** está sostenido por una cuerda ideal que cuelga del eje de una polea de masa despreciable. Al bajar, este bloque arrastra el bloque de masa **m**, el cual sube por un plano inclinado fijo al piso. El roce estático entre el plano inclinado y el bloque de masa **m** es μ.

a.- Encuentre el rango de valores que puede tener la masa **M** para que el sistema permanezca estático.

b.- Suponga que el bloque triangular que sostiene la masa **m**, puede deslizar sobre el piso horizontal. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que se requiere para mantener este bloque en reposo? ¿Es posible que esta fuerza sea nula para un conjunto de valores de **M** y **m**?

Bibliografía

[1] **Understanding Physics** K. Cummings, P. Laws, E. Redish and P. J. Cooney, John Wilwey and sons Inc., 2004. Tiene excelentes ilustraciones, buenos problemas y ejemplos y tiene, según la declaración de sus autores, una orientación moderna del aprendizaje. El roce aparece en el cap. VI, pág. 149 de esta edición.

[2] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A DE C., México, Primera re-impresión, 1996. Ver cap. VI, pág. 125.

[3] **Lectures on Physycs** R. P. Feynman, Vol I, Addison Wesley,1967. Ver el capítulo 12, sección 2. Este capítulo está basado en dicho sección.

[4] **Rozamiento a Escala Atómica**, Jacqueline Krim, Investigación y Ciencia, N^o 243. Ver artículo original en Scientific American, Oct.1996. Amos disponibles en la Biblioteca Central.

[5] **Nanotribology: The renaissance of Friction**, M. Urbakh and E. Meyer, Nature Materials 9,8 -10 (2010).

[6] **The violin: Chladni patterns, plates, shells and sounds**, C. Gough, Eur. Phys J. Topics 145, 77 - 101(2007).

[7] **Instrumentos Musicales: Artesanía y Ciencia**, H. Massmann y R. Ferrer, Dolmen, 1993, págs.158–162.

PROBLEMA RESUELTO

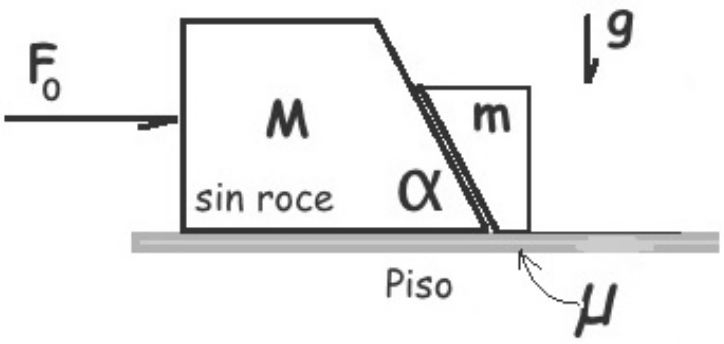
Considere el sistema de dos bloques con masas **M** y **m** que aparecen en la figura. El ángulo de inclinación de las caras en contacto de estos bloques es conocida $\alpha < \pi/2$. Existe roce (estático y cinético) solamente entre el piso y el bloque de masa **m**. El roce es despreciable en todas las otras superficies en contacto.

A la masa **M** le aplicamos una fuerza externa $\mathbf{F}_o$, horizontal.

a.- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los bloques y escriba las ecuaciones de movimiento que se desprenden de estos diagramas.

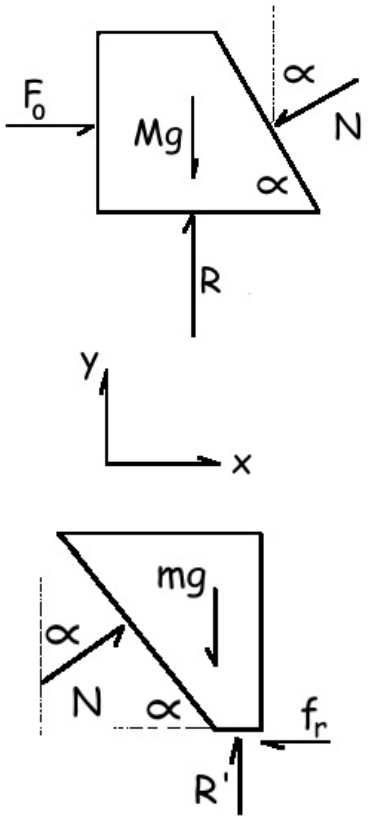
b.- Calcule el valor mínimo de la fuerza $\mathbf{F}_o$ aplicada sobre **M** para que la masa **m** esté a punto de levantarse del piso.

c.- Discuta, cuál sería su respuesta para la pregunta b.- si la única superficie con roce no-despreciable ocurre entre las dos superficies inclinadas y en contacto. Dando argumentos físicos y sin hacer todos los cálculos, Ud. concluya que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_o$ debería ser mayor, menor, infinita, ...que aquella en el caso b.-



Solución

a.- Los DCL de cada una de las componentes aparecen en la Figura adyacente. Aquí NO se considera que intentamos levantar el bloque de la izquierda. La fuerza **N** es la que transmite la interacción de un cuerpo con su par. Al considerar la misma aceleración para ambos cuerpos, estamos informando a las ecuaciones que los cuerpos se mueven juntos.



$$\begin{aligned} \text{eje}-x\,:\; F_0 - N\,\text{sen}\alpha &= M\,a, \quad [1]\\ \text{eje}-y\,:\; -M\,g + R - N\,\cos\alpha &= 0, \quad [2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{eje}-x\,:\; N\text{sen}\alpha - f_r &= m\,a, \quad [3]\\ \text{eje}-y\,:\; R' - m\,g + N\cos\alpha &= 0, \quad [4] \end{aligned}$$

Las ecuaciones [1] y [2], corresponden al bloque de la izquierda y la [3] y [4] al que se trata de levantar.
Contamos 5 incógnitas: **a**, **N**, **R**, **R'**, y $\mathbf{f}_r$, por tanto necesitamos una ecuación adicional. Esta es la relación entre el roce cinético $\mathbf{f}_r$ y la normal **R'**. Como el roce cinético es constante, tenemos: $f_r = \mu_c$**R'**.
No nos piden resolver todas las incógnitas pero lo haremos.

Observamos que las ecuaciones [2] y [4] pueden ser consideradas como la definición de **R** y **R'**. Si conozco **N**, están determinadas en forma directa. Además, si multiplico la ecuaciónn [4] por el coeficiente de roce cinético μ_c, puedo despejar μ_c**R'**de la ecuación [3] y quedo con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\text{eje}-x\,:\qquad F_0 - N\,\text{sen}\alpha = M\,a, \quad [1]$$

$$\text{eje}-x\,:\; N\,\text{sen}\alpha - \mu_c\,m\,g + \mu_c\,N\cos\alpha = m\,a, \quad [5]$$

Si multiplicamos la ecuación [1] por **m** y la ecuación [5] por **M** y las restamos, obtenemos una ecuación para **N**

$m\,[F_0 - N\,\text{sen}\alpha] = M\,[\,N(\text{sen}\alpha + \mu_c\,\cos\alpha) - \mu_c\,m\,g\,]$ de aquí despejamos **N**, obteniendo

$$N = \frac{\mu_c\,m\,g + (m/M)\,F_o}{[(1 + m/M)\,\text{sen}\alpha + \mu_c\,\cos\alpha]}. \qquad [6]$$

Esta ecuación puede ser verificada en dos casos límites: 1.- cuando m = 0, **N**=0, como se espera y 2.- cuando $\alpha = \pi/2$, que puede ser verificado puesto que es un problema más simple. (Ejercicio).

$$a = \frac{F_o}{M} - \text{sen}\alpha \, \frac{\mu_c \, m \, g + (m/M) \, F_o}{[(M + m)\text{sen}\alpha + \mu_c M \cos\alpha]} \qquad [7]$$

Nuevamente podemos comprobar esta expresión en casos extremos. Si $\alpha = \pi/2$, tenemos

$$a = \frac{F_o}{M} - \frac{\mu_c \, m \, g + (m/M) \, F_o}{[(M + m]} = \frac{F_o}{m + M} - \frac{\mu_c \, m \, g}{(m + M)}, \quad \text{que es lo esperado.}$$

El caso m = 0, es trivial. (Ejercicio).

b.- Si consideramos el caso donde la masa **m** está a punto de levantarse, aparecen nuevas condiciones que debemos imponer.

La condición a punto de levantarse requiere de una magnitud mínimo de la fuerza aplicada $\mathbf{F}_o$ para que esto ocurra. Por otra parte, la masa **m** no ejerce presión sobre el piso y por tanto **R**' = 0 = $\mathbf{f}_r$. Aplicamos esta última condición en la ecuación [4] y obtenemos

$$N \cos\alpha = m \, g \Rightarrow N = \frac{m \, g}{\cos\alpha}$$

Usando este valor de **N** en la ecuación [3], obtenemos

$$a = \frac{N \, \text{sen}\alpha}{m} = g \, \tan(\alpha).$$

Usando el valor de la aceleración **a** y de **N** , encontramos el valor mínimo de la fuerza $\mathbf{F}_o$ requerido para levantar la masa **m**.

$$F_0 = N \, \text{sen}\alpha + M \, a = m \, g \tan\alpha + M \, g \, \tan\alpha \Rightarrow F_0 = (M + m) g \, \tan\alpha.$$

Ejercicio

a.- De las ecuaciones iniciales encuentre la expresión para la reacción **R**'.

b.- Imponga que **R**' =0, y obtenga la expresión anterior para la fuerza $\mathbf{F}_0$.

c.- Si sólo existe roce en el plano inclinado de contacto, se requiere una fuerza $\mathbf{F}_0$ MUCHO MAYOR. El argumento es que si no existe roce en el piso, la presión que ejerce la masa **m** sobre **M** proviene de la inercia de la primera. Esta presión ya existía en el caso anterior y además, en estas circunstancias el roce trata evitar el desplazamiento de la masa. Por esto uno espera que la fuerza sea mucho mayor que en el caso anterior e incluso que para un ángulo α cercano a $\pi/2$ no sea posible levantarla.

Capítulo VIII

RESORTES Y UNA APLICACIÓN: MODELO DE UN SÓLIDO

VIII.1. INTRODUCCIÓN

Cuando se sostiene una masa desde el extremo de un alambre, que permanece fijo en su otro extremo, experimentará un aumento de su longitud, que será, en general, casi imperceptible. Lo denominamos $\Delta\mathbf{L}$. Es razonable pensar que este aumento de longitud depende del largo inicial del alambre $\mathbf{L}$. Si el alambre duplica su longitud, se alargaría - esperamos - el doble: $2\,\Delta\mathbf{L}$, puesto que cada segmento inicial del alambre se alarga lo mismo.

Otra variable de interés es la sección transversal, o el área del alambre. Esta última podría adoptar diversas formas: cuadrada, rectangular, circular... ,pero sus dimensiones son mucho más pequeñas que el largo.

Podemos aventurar que mientras mayor sea la sección transversal del alambre, menor es su aumento en el largo. Mientras más área, menos alargamiento. Podemos imaginar muchos alambres iguales sosteniendo la misma carga.

Si queremos cuantificar la tensión del alambre y su deformación, conviene hacerlo independiente del largo inicial y de su diámetro o sección transversal. Para ello definimos un número adimensional $\frac{\Delta L}{L} \equiv \epsilon$ como la deformación por esfuerzo. Este parámetro caracteriza el comportamiento del material independiente de su largo inicial.

Lo mismo podemos hacer con la fuerza. Podemos definir una tensión como una fuerza por unidad de superficie transversal $\sigma \equiv T/(\text{Área})$.

Queda otro factor importante sin considerar: la naturaleza del material. Bajo las mismas condiciones: tensión, sección transversal, largo, la deformación del alambre depende del material usado en el alambre: cobre, acero, plomo, un hilo plástico... Será un nuevo parámetro que denominamos Módulo de Young: $\mathbf{Y}$, en honor a quien comenzó a usarlo en este contexto.

Lo escribimos de dos formas equivalentes, como se muestra a continuación:

$$Y \equiv \frac{\dfrac{F}{\text{Area}}}{\dfrac{\Delta L}{L}}, \qquad \text{o} \qquad \frac{F}{\text{Área}} \equiv \sigma = Y\,\frac{\Delta L}{L} = Y \cdot \epsilon. \tag{VIII.1}$$

El módulo de Young **Y**, es una propiedad del material y no depende de la longitud o sección transversal del alambre.

Para estudiar un resorte, que es el objetivo de este capítulo, consideramos un objeto en el cual una de sus dimensiones: su longitud, es mucho mayor que el diámetro de su sección transversal.

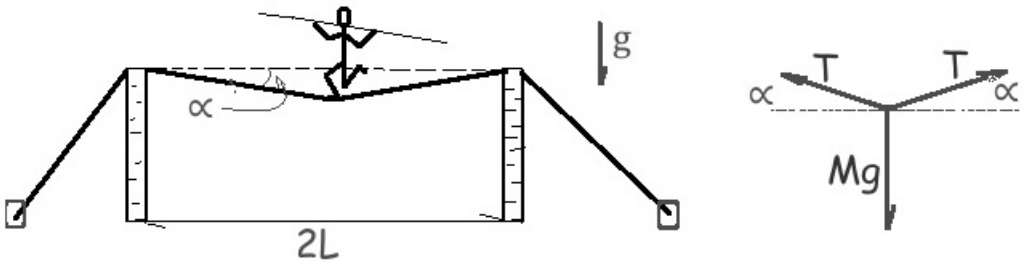
Ejemplo

Un hombre se equilibra manteniéndose en el punto medio de un cable de acero, tenso, cuyos extremos están atados en dos murallas opuestas. Si este equilibrista tiene un peso de 600 newton y el cable tiene un largo de 10 m y una sección transversal de 4 mm^2, encuentre el valor del ángulo α que caracteriza el alargamiento del cable que lo sostiene.

Solución

Podemos encontrar el valor del módulo de Young en tablas disponibles en Internet. En este caso, $\mathbf{Y}_{acero}$=180$\times$10^9 Pa (ó 180 **GPa**).

Para determinar lo que se alarga el cable, se requiere conocer el ángulo α (en radianes) indicado en la Figura.



i

Figura VIII.1: *Por muy tenso que esté el cable, necesariamente se deformará para sostener un peso. Para evaluar el alargamiento del cable necesitamos conocer el valor del ángulo α y usar geometría y aproximaciones. El ángulo α es. en general pequeño.*

De la Figura se desprende que $\tan\,\alpha = \Delta\,L/L$, como el ángulo α en radianes, es pequeño esta expresión se transforma en $\alpha \approx \Delta\,L/L = \epsilon$.

Para calcular la tensión que experimenta el cable, utilizo el DCL indicado en la Figura VIII.1, de donde obtengo 2 T $\text{sen}\,\alpha$ = M g. Usando la aproximación, obtenemos 2 T $\alpha \approx$ M g.

El esfuerzo de tensión del cable está dado por $\sigma = T/$[Área] = (M g)/[2 α Área].

Solo nos queda incorporar los valores en la definición del módulo de Young para encontrar el valor de α.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} \approx \alpha &= \frac{\sigma}{Y_{\text{acero}}} = \frac{M\,g}{2\cdot\alpha\cdot\text{Área}\cdot Y_{\text{acero}}}. \\ \alpha &= \frac{600\cdot 10}{2\cdot\alpha\cdot 16\times 10^{-6}\cdot 180\times 10^{9}} \\ \alpha^2 &\approx \frac{1}{960} \;\Rightarrow\; \alpha\approx 0{,}03 \text{ radianes.} \end{aligned} \tag{VIII.2}$$

□

Modelo Simple de un Resorte

El módulo de Young VIII.1 se definió como el factor de proporcionalidad entre el alargamiento por unidad de largo y la fuerza aplicada por unidad de superficie $\sigma = Y\,\epsilon$. Esta forma válida para un objeto con una de sus dimensiones -la longitud-, mucho mayor que las otras, el diámetro por ejemplo, es la más simple y nos conectará con los resortes que obedecen una relación fuerza – alargamiento similar.

El ejemplo anterior nos muestra que la deformación de un sistema es, en general, muy pequeña: Δ L = 0.03 · (10/2) metros $\approx$ 15 cm en 10 metros.

Conocemos objetos que se deforman visiblemente con pesos más pequeños y que forman parte de la vida diaria: los resortes. El principio físico es diferente, funcionan torciendo el alambre, el resorte es como un rizo. Para lograr que recupere su forma después de ser deformado, debe recibir un tratamiento térmico. Al estudiar el resorte nos concentramos en dos parámetros: la fuerza aplicada y la deformación medida. Su comportamiento sigue una ley empírica descubierta por Hooke. Tiene una forma similar a la de Young pero concentra todos los parámetros en una sola función. Esto se muestra en la siguiente fórmula

https://en.wikipedia.org/wiki/Oscillation

$$Y \equiv \frac{\dfrac{F}{\text{Area}}}{\dfrac{\Delta L}{L}}, \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{Y\,\text{Área}}{L}\,\Delta L$$

$$\text{Ley de Hooke:} \qquad \vec{F}_{\text{ext}} = k\,x, \qquad \text{con} \qquad k \equiv \frac{Y\,\text{Área}}{L}. \tag{VIII.3}$$

La fuerza aplicada es proporcional a la deformación. Denominamos un resorte al objeto unidimensional que sigue esta ley de deformación.

Comenzamos describiendo el modelo de un resorte ideal y lo aplicaremos a la descripción de un sólido, en la segunda parte de este capítulo.

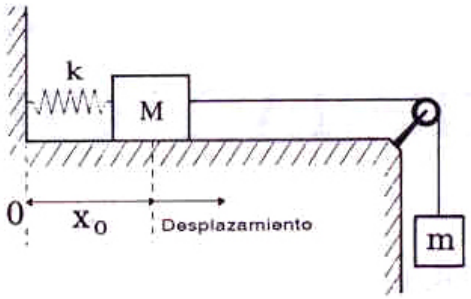
El resorte ideal es una generalización del hilo ideal de masa nula e inextensible, donde permitimos que cambie su largo de acuerdo a la fuerza externa ejercida.

VIII.2. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE

VIII.2.1. Experimento

Para encontrar el comportamiento de un resorte sometido a una fuerza, realizamos el siguiente experimento: *lentamente* vamos añadiendo masas iguales a un extremo del resorte, en la forma que se indica en la Figura. Simultáneamente procedemos a tabular el alargamiento que experimenta el resorte en cada una de estos procesos y la fuerza que lo provoca. Al graficar los resultados se obtiene la ley de fuerza que gobierna el comportamiento de un resorte.

F = T	*Desplazamiento*
1 N.	. 31 mm.
2 N.	. 64 mm.
3 N.	. 89 mm.
.	.
.	.



Después de realizar numerosos ensayos se puede ver una tendencia:
El desplazamiento del extremo de un resorte, medido a partir de su largo natural x_0, es proporcional a la fuerza aplicada.

El largo natural del resorte, denominado x_0, es la longitud que adquiere cuando no existe ninguna fuerza externa aplicada sobre él.

Esta es una *ley empírica*: proviene de la experimentación y no representa un conocimiento más profundo de los mecanismos que utiliza el resorte para reaccionar de esta forma a la acción de una fuerza. De hecho no todos los resortes reaccionan en forma idéntica. Por ejemplo los resortes, en general, no reaccionan de la misma forma al ser comprimidos que al elongarlos. Algunos resortes sólo pueden ser elongados, no pueden ser comprimidos.

En la Figura se grafica la fuerza aplicada *versus* el desplazamiento. El resorte se opone con una fuerza de igual magnitud y dirección pero en **sentido opuesto**. La ley de fuerzas para el resorte es:

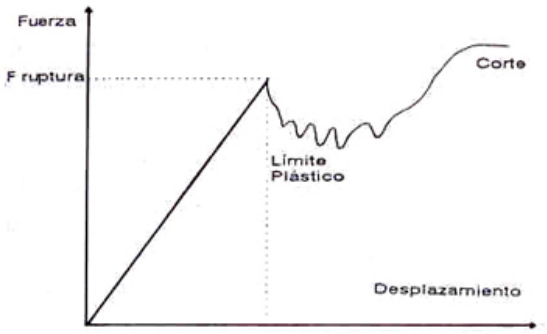


Figura VIII.2: *En la abcisa del sistema de coordenadas se anota el desplazamiento del extremo del resorte y en la ordenada la fuerza aplicada. Después de experimentar con distintas magnitudes de fuerza, se observa que existe una zona donde una línea recta representa la tendencia de los puntos tabulados.*

$$F = -k\,(x - x_0). \tag{VIII.4}$$

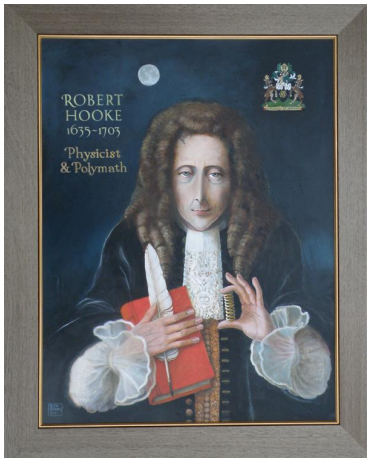
Esta es la *ley de Hooke*.

El punto de quiebre de la línea se denomina el *límite elástico* y marca el inicio del comportamiento plástico del resorte: aquella región donde la deformación experimentada por el resorte se transforma en deformación permanente. El resorte no recupera su largo inicial.

La fuerza se debe aplicar lentamente de forma que la masa m no adquiera velocidad. Si la velocidad no es despreciable, el análisis del problema debe incluirla. Esta última situación será estudiada posteriormente.

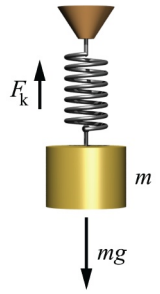
-

Robert Hooke (1635–1703) fue contemporáneo de Newton y un hombre que destacó en diferentes áreas: construyó una bomba de vacío que permitió a Boyle encontrar la ley de los gases ideales que lleva su nombre, construyó un microscopio con el cual observó el corcho y otros tejidos de plantas y notó que estaban constituidos por pequeñas cavidades separadas por paredes que denominó *celdas*. Esta es una de las primeras menciones de lo que posteriormente se conoce como *célula*. Fue uno de los críticos de la teoría corpuscular de la luz, elaborada por Newton. Se dice que Newton destruyó todos sus retratos a su muerte. El retrato que se acompaña fue realizado a partir de descripciones de la figura de Hooke por la retratista Rita Greer (ver Ref . 3).



-

Escribimos las ecuaciones de Newton asociadas a la masa m, tomando el extremo del resorte como origen del sistema de coordenadas.
Hemos supuesto que la masa del resorte es despreciable comparada con la masa que colgamos de su extremo.
El diagrama de cuerpo libre para la masa en el extremo del resorte se indica en la Figura. En la dirección horizontal tenemos:



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Mass-spring-system.png

$$-F + T = m\,a, \qquad \text{con} \qquad T = mg.$$

donde T representa la fuerza que opone el resorte al intentar ser elongado y F es la fuerza externa, proveniente –en este caso–, de las masas que se han colgado desde el extremo.

Si las masas se cuelgan cuidadosamente, la aceleración es nula, $a = 0$, entonces $T = F$ en cada instante. Al estudiar la tabla de valores obtenida experimentalmente, podemos relacionar la fuerza aplicada con la deformación del resorte. El resultado es una relación lineal entre la fuerza y la deformación, válida dentro de un cierto rango de valores para la fuerza, denominado el rango de linealidad del resorte:

$$F = -k\,x. \tag{VIII.5}$$

La constante k, mide la rigidez del resorte. Un resorte muy rígido tiene asociado un alto valor de k; en este caso debemos aplicar una fuerza de magnitud apreciable para poder estirar el resorte una

distancia pequeña. El caso opuesto, un valor de k muy pequeño representa un resorte muy débil sobre el cual una fuerza pequeña producirá una deformación apreciable.

Las dimensiones de k son:

$$[k] = \frac{[newton]}{[m]}.$$

Ejemplo

Dados dos resortes idénticos, de rigidez k, calcular la deformación que experimentan al colgar una masa m, en los dos casos siguientes: cuando los resortes se conectan en serie, y en paralelo.

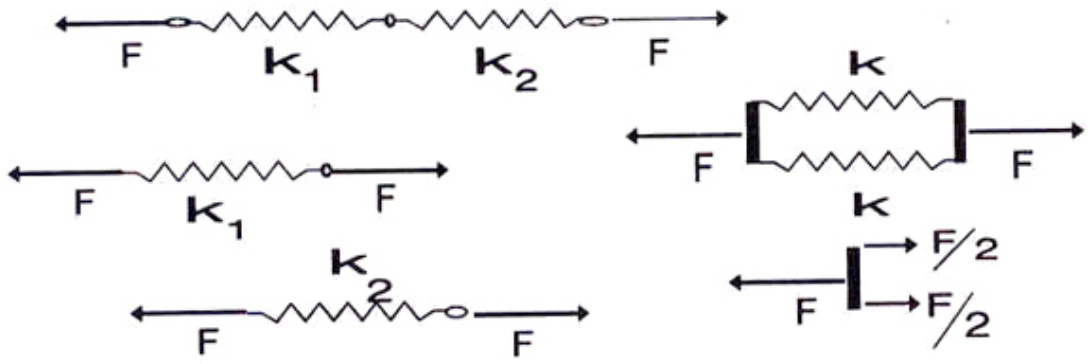


Figura VIII.3: A la derecha se representa a los dos resortes conectados en paralelo y a la izquierda aparecen conectados en serie. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de las configuraciones.

a) Resortes en serie.
Para obtener un resultado más interesante supongamos que la constante de rigidez de cada resorte es diferente. Al conectar los dos resortes en serie obtenemos otro resorte, cuya rigidez la definimos como K y cuya expresión debemos encontrar a continuación.

Al aplicar una fuerza F (con $F = m\,g$) en los extremos del sistema de dos resortes, en la unión de cada resorte actúa la misma fuerza F en la dirección y sentido que se indica en la Figura. Debido al efecto de esta fuerza cada uno de los resortes se elonga una distancia F/k_1 y F/k_2. Como la elongación de cada uno de los resortes se debe sumar debido a la forma en que están conectados, el resorte compuesto se estira:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right] \equiv \frac{F}{K} \;\Rightarrow\; \frac{1}{K} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right].$$

Conociendo el valor de la constante K para esta configuración, podemos estudiar el caso particular en que ambos resortes tienen la misma rigidez:

$$\frac{1}{K} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right], \text{ si ambos resortes son iguales } \frac{1}{K} = \frac{2}{k} \implies K = \frac{k}{2}. \qquad \text{(VIII.6)}$$

b) Resortes en paralelo.

En este caso suponemos de un comienzo que ambos resortes son idénticos. Como están en paralelo, cada uno soporta la mitad del peso de la masa m, es decir, una fuerza $F/2$. Cada uno de los resortes se elonga $F/(2\,k)$ y, de acuerdo a la forma como están conectados los resortes, el sistema se elonga $F/(2\,k)$, de modo que el resorte equivalente tiene una constante de rigidez:

$$K = 2\,k, \quad \text{para resortes en paralelo.} \tag{VIII.7}$$

En resumen, si tenemos dos resortes y queremos armar un resorte más duro, debemos conectarlo en paralelo. Ahora, si lo deseamos más blando, debemos conectarlo en serie.□

Ejemplo

Disponemos de dos resortes idénticos, cada uno con constante de rigidez **k** y dos masas iguales **m**. Si las conectamos de dos formas diferentes: en una instalamos una de las masas entre los dos resortes y la otra en el extremo del segundo resorte. En la otra, las dos masas se instalan en el extremo del segundo resorte. En ambos casos los resortes están dispuestos en forma vertical.

Solución

Consideremos primero la configuración que aparece en la Figura a.- .

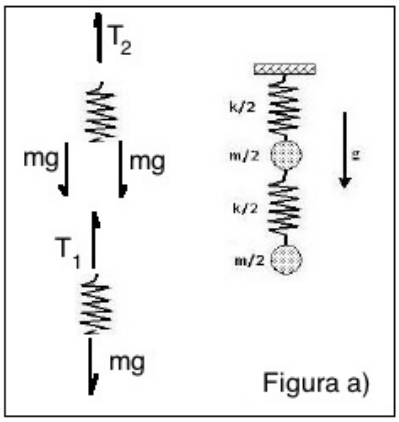


Figura a)

El DCL del resorte inferior es: **(- m g + T_1) = 0**, puesto que ésas son las dos únicas fuerzas que actúan sobre el resorte inferior. Hemos tomado (+) apuntando hacia el borde superior de la hoja. Se desprende que **T_1 = m g**.

Con este dato podemos saber cuánto se estira el resorte inferior: $\Delta_1 = $ m g/k.

En el resorte superior, actúan dos fuerzas apuntando en el sentido negativo **T_1 = m g**, la reacción a la acción del resorte inferior y el peso de la masa **m g**. La tensión en el otro extremo del resorte que equilibra esta fuerza es **T_2 = 2 m g**. Y su elongación es $\Delta_2 = 2$ m g/k.

la elongación total es

$$\Delta_{\text{Total}} = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{3\,m\,g}{k}.$$

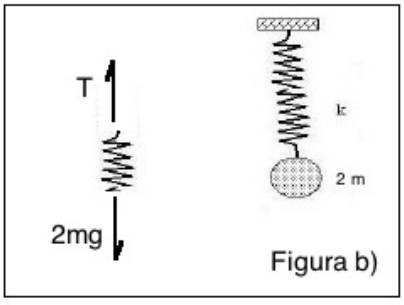


Figura b)

La segunda configuración (Figura b.-) es directa: los dos resortes están en serie, por tanto la rigidez efectiva de ambos es **K** y su valor se obtiene de: **1/K = 1/k + 1/k = 2/k**, de modo que **K = k/2**.

La tensión sobre el resorte es **2 m g** y su elongación es $\Delta_3 =$ **(2 m g)/(k/2) = 4 m g/k**.

La segunda configuración produce una mayor deformación del sistema.

Ejercicio

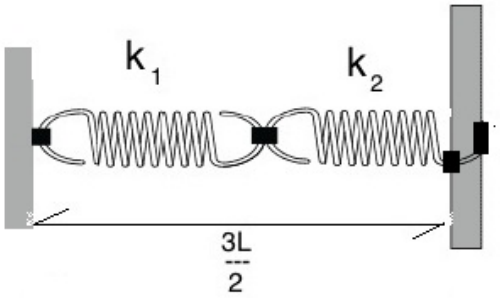
Encuentre el valor de la rigidez equivalente K_n que tienen n resortes idénticos al ser conectados: a.- todos en paralelo y b.- todos en serie.□

Ejemplo

a.- Dos resortes de rigidez $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ con $\mathbf{k}_1 > \mathbf{k}_2$ y ambos de largo natural **L** se acomodan en un espacio horizontal de largo **3L/2**. (Ver Figura).
Encuentre cuánto se acorta cada uno de ellos para caber en este espacio.
Compruebe su resultado está de acuerdo a su intuición para el caso $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

b.- El mismo conjunto de resortes, pero ahora permanecen verticales y se instala una masa **M** en el punto de unión de ambos resortes. Calcule el largo que adopta cada resorte para sostener la masa y caber en la altura dada: **3 L/2**.

Solución:

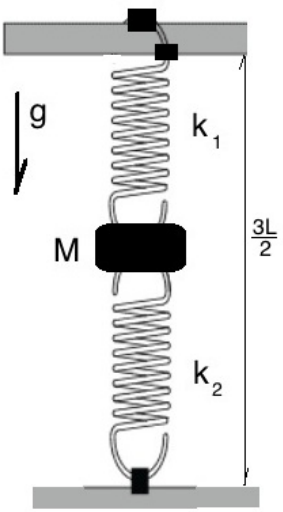


a) Ponemos los dos resortes en serie, con uno de sus extremos (el izquierdo, por ejemplo) apoyado en la pared. En el otro una fuerza F_0 tal que los dos resortes alcancen un largo **3 L/2**. Como los resortes están en serie

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad \text{ordenando} \quad \kappa = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

De modo que la fuerza F_0 que debemos aplicar debe tener una magnitud

$$F_0 = \kappa \frac{L}{2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{L}{2}.$$



Si hacemos un diagrama de cuerpo libre de cada resorte, podemos conocer su acortamiento.
Como sabemos, la fuerza F_0 comprime a cada uno de los resortes por igual debido a que no tienen masa. De esta manera el acortamiento del resorte k_1 es

$$\Delta_1 = \frac{F_0}{k_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{L}{2}$$

y el acortamiento de k_2

$$\Delta_2 = \frac{F_0}{k_2} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{L}{2}$$

si uno de los resortes (k_2 por ejemplo) es una barra rígida, entonces $k_2 \to \infty$

$$\Delta_2 \to 0, \quad \text{y} \quad \Delta_1 \to \frac{L}{2}.$$

Este último cálculo ilustra el hecho que los resortes aplican la misma fuerza ($\mathbf{F}_o$) pero no se deforman lo mismo. Están en serie, por definición. En el siguiente caso, que es muy similar, los resortes se comportan como resortes en paralelo, ambos tienen la misma deformación pero aplican fuerzas diferentes.

b.- En este caso, como los resortes no tienen masa, la fuerza de compresión calculada en la parte a.- no se modifica. Sin embargo la inclusión de la masa **M** obliga a cada resorte a contribuir con una fuerza para soportar la masa. Por la geometría ambos deben deformarse adicionalmente un factor que denominamos $\bar{\Delta}$. La fuerza de cada uno es entonces $F_1 = k_1 \bar{\Delta}$ y $F_2 = k_2 \bar{\Delta}$.
Por otra parte, ambos deben sostener el peso $\mathbf{M}\,\mathbf{g}$ de modo que debe cumplirse $\mathbf{M}\,\mathbf{g} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Reemplazando las expresiones de la fuerza se obtiene:

$$\bar{\Delta} = \frac{M\,g}{k_1 + k_2}. \tag{VIII.8}$$

Con esto obtenemos la expresión de la fuerza y desplazamiento de cada resorte debido a la inclusión de la masa **M**.

VIII.3. MODELO DE UN SÓLIDO y EL MÓDULO DE YOUNG

El material de esta sección incluyendo las figuras, está extraído del libro **Matter and Interactions I, Modern Mechanics**, Chapter 4, de los autores Ruth W. Chabay and Bruce A. Sherwood.

El modelo de fuerzas utilizado para describir el comportamiento de un resorte ideal lo extenderemos a un sólido.

Primero verifiquemos que sigue el comportamieno básico de un resorte: al aplicar un par de fuerzas que compriman un cilindro esbelto de cobre, éste disminuye su altura. Al tensionarlo su largo aumenta. En ambos casos el cilindro de cobre, al igual que el resorte se opone a la fuerza externa. No se comporta como una plasticina. Recupera -si las fuerzas aplicadas no son excesivas- su tamaño original.
Esta es la característica que hace el modelo de un resorte tan importante en todas las áreas de la

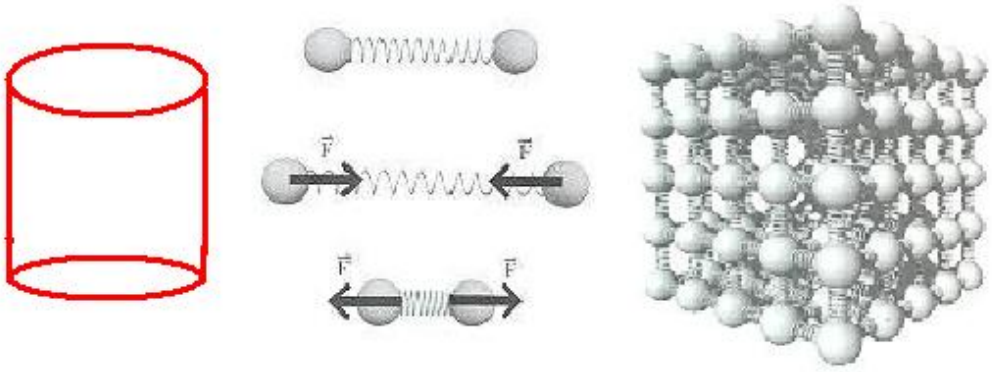


Figura VIII.4: *El modelo de un cilindro de cobre que, para simplificar los cálculos, suponemos de sección cuadrada y con una altura mayor que sus lados. El ladrillo básico son esferas unidas por resortes. Es un modelo clásico de un sólido. (Extraído desde Ref. 1)*

.

física: representa un modelo estable.

Un sólido es difícil de comprimir: puede resistir una carga importante sin cambiar notablemente su forma original. Tampoco se desarma si lo sometemos a tracción. Los átomos de un sólido no se escapan (o evaporan) con la rapidez de la observada en un líquido, por ejemplo. De este modo un resorte es un primer modelo razonable de un sólido que responde a estas características. Es lo que se indica en la Fig.VIII.4.

El número de átomos en un volumen de 22,4 litros, con una presión atmosférica de aproximadamente 10^5 pascal (o una atmósfera) y una temperatura (300^o K, es de 6×10^23 átomos. La magnitud de este número indica que el modelo básico de un sólido debe ser una gran red de resortes que unan los átomos considerados como partículas situados en los vértices de los cubos básicos del modelo.

Esta es una posibilidad, es un modelo cúbico, podría ser de cuerpo centrado y tener un átomo adicional al centro del cubo... .Elegimos éste por ser el más simple y probaremos si los resultados que obtenemos son razonables.

Para que un modelo sea de utilidad además de ser simple debe reproducir algunas de las características del sólido al cual representa. Debemos, por tanto, reproducir algunas de las características de este modelo y verificar su grado de aproximación al comportamiento de un sólido real.

Un primer paso es estimar la distancia de separación entre los átomos. este número nos indicaría (aproximadamente) el largo natural del resorte. Consideramos que existe un átomo por celda, que el material es el Cu, con su peso molecular **63,55** y el número de Avogadro $\mathbf{N}_A = 6{,}022\times10^{23}$ [1/mol]. Esto nos dice que 63,55 gr de cobre tienen $6{,}022\times10^{23}$ átomos. La densidad del cobre es

8,96 gr/cc.

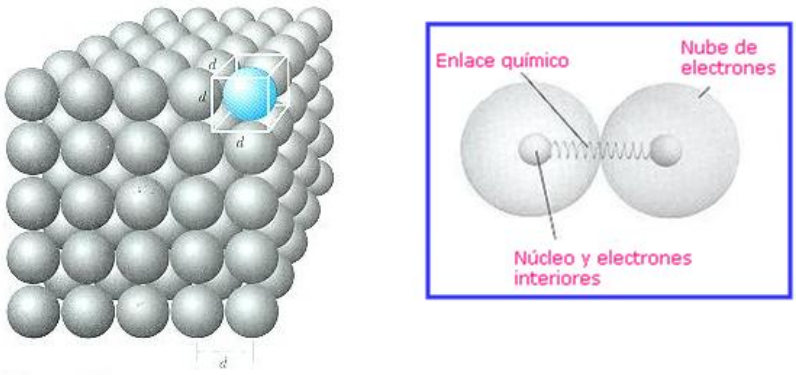


Figura VIII.5: *Cada átomo ocupa un cubo de lado* **d**. *El núcleo del átomo está rodeado de una nube de electrones. Cada átomo es neutro, pero interactúa con el vecino a través de las deformaciones que experimenta esta nube. Este efecto se modela mediante un resorte que une ambos núcleos. (Extraído de ref. 1)*

.

Si consideramos que un átomo de cobre ocupa un cubo de lado **d** (ver Figura) podemos obtener el valor de esta distancia **d**. Una regla de tres nos dice que si existen $\mathbf{N}_A$ átomos en 63,55 gramos, en 8,96 existirán $85\times\ 10^{21}$ átomos. Pero estos se ubican en 1 cc de volumen, de acuerdo a la densidad del cobre. por tanto la distancia entre átomos en esta cubito es $\approx\ 2\ \times\ 10^{-10}$ m. Esto es aproximadamente 1 A^o = 10^{-10} m, que será el valor que usaremos.

Como no existe físicamente un resorte entre los átomos (obvio) el resorte modela la fuerza que se produce a través de la interacción de la nube de electrones de dos núcleos cercanos.

Con este modelo, podemos estimar la rigidez del resorte (imaginario) que una a dos átomos vecinos $\mathbf{k_{atómico}}$. De alguna forma la rigidez de este resorte debe estar ligada a la naturaleza del material de prueba que usamos. Físicamente esto puede provenir de varias fuentes, una debe ser la estructura cristalina que posee el cristal. Esa información nos la da lo que se denomina el **módulo de Young: Y**, asociado a este metal. El módulo de Young es la razón entre la tensión (o stress) que es fuerza por unidad de superficie y por tanto se mide en pascal por cm^2, y la deformación (strain) que es la razón entre la deformación experimentada por un sólido en una cierta dirección y su largo en la misma dirección, de manera que resulta ser un número sin dimensiones. Estas cantidades se introducen acá para que sean independientes del tamaño del modelo que estamos usando.

$$Y\ =\ \frac{\text{fuerza por unidad de superficie}}{\text{porcentaje de elongación}}\ =\ \frac{F/A}{\Delta L/L}.$$

Las letras que identifican estas cantidades son:

$$\text{strain} \equiv \epsilon = \frac{\Delta L}{L}, \qquad \text{tensión} \equiv \sigma = \frac{F}{A}.$$

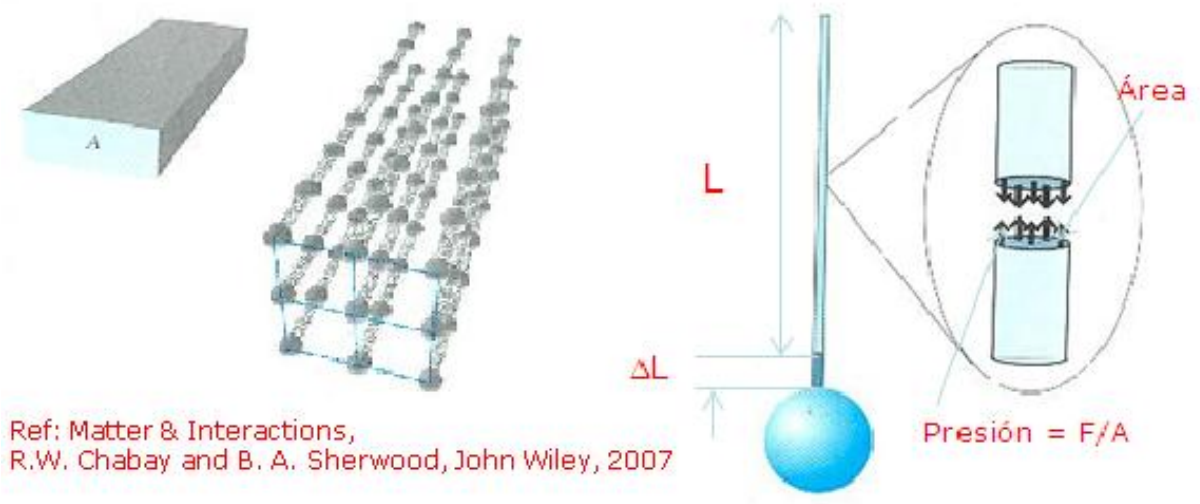


Figura VIII.6: *Una ilustración del modelo de resortes interatómicos usados en serie y en paralelo para modelar el trozo de cobre, de sección rectangular que aparece a la izquierda. El dibujo de la derecha ilustra la definición de strain (Δ L/L) y el stress (F/A). (Extraido desde Ref. 1)*

.

Para hacer esta estimación, simplificamos aún más el modelo y despreciamos los resortes perpendiculares a la dirección en la cual aplicaremos una tracción para estimar el módulo de rigidez $\mathbf{k_{atómico}}$ en función de cantidades elementales, como la distancia interatómica **d**, **E** el módulo de Young y otras constantes.

La estrategia a seguir es: El modelo consiste de una serie de tiras de resortes longitudinales. Para calcular su rigidez efectiva debemos usar la rigidez equivalente para resortes en serie (cada columna de resortes) y en el efecto de la suma de las cadenas paralelas de resortes. Con este cálculo obtendremos la rigidez efectiva de este trozo de cobre.

Veamos cuál es el valor numérico del módulo de Young para el cobre. Su valor es 117×10^9 pascal. La definición del módulo de Young es una generalización de la ley de Hooke

$$\sigma = Y\,\epsilon, \qquad \text{de modo que} \qquad Y = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{(\Delta L)/L} = \frac{F}{\Delta L}\,\frac{L}{A}. \tag{VIII.9}$$

El significado de estas letras está indicado en la Figura[**?**].

Ejercicio

Demostrar que, a partir del modelo propuesto, la rigidez del alambre de cobre en función de la rigidez del resorte interatómico es

$$\mathbf{k}_{\text{atómico}} = \frac{\mathbf{k}_{\text{alambre}}\mathbf{N}_{\text{cadena}}}{\mathbf{N}_{\text{transversal}}}. \tag{VIII.10}$$

Nos referimos a un alambre porque supondremos que el diámetro es mucho menos que su largo **L**.
□

Si aplicamos una fuerza F en los extremos del bloque, podemos estimar cuánto se alarga la cadena de resortes, lo que denominamos $\Delta\,\mathbf{L}$. (Ver Figura).

Con estos datos podemos estimar la rigidez del resorte interatómico, $\mathbf{k_{atómico}}$ asociado a este modelo propuesto.

El módulo de Young está normalizado, de modo que sea un número que caracterice un material independiente de sus dimensiones, por eso se utiliza la Tensión σ=F/A y la elongación relativa ϵ = Δ **L/L**.

$$E \equiv \frac{\sigma}{\epsilon}. \tag{VIII.11}$$

Utilizando el resultado del ejemplo anterior e introduciendo la ley de Hooke,

$$\mathbf{k}_{\text{alambre}} = \mathbf{F}/(\mathbf{\Delta}\,\mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}_{\text{atómico}} = \frac{Y\,A\,N_{\text{cadena}}}{L\,N_{\text{transversal}}}. \tag{VIII.12}$$

donde usamos el resultado [**?**]. de aquí, reemplazando las definiciones se obtiene que

$$\mathbf{k}_{\text{atómico}} = Y\,d \quad [Pascal \times m]. \tag{VIII.13}$$

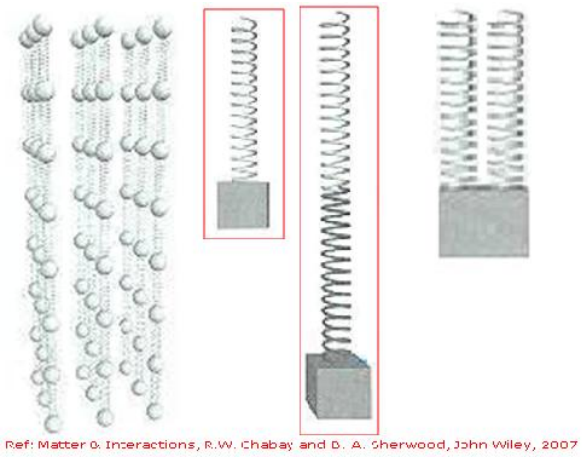
Reemplazando los valores del cobre, obtenemos que $\mathbf{k_{atómico}} = \approx 25$ Newton-m.
Este valor para la rigidez del resorte instalado entre los átomos es mayor que la rigidez del *slinky*, el resorte como culebra que se alarga fácilmente cuando se le cuelga una masa pero menos que muchos otros. Por ejemplo el alambre de cobre de largo 1m y **d** = 1mm, es aproximadamente 10^7 Pascal-m. Mucho mayor que la rigidez del resorte interatómico.

Al estudiar la energía, más adelante, podremos retomar este tema y el del músculo, que introduciremos en la siguiente subsección.

El siguiente paso es estimar el número de resortes puestos en serie en cada fila y cuántos resortes debemos considerar en paralelo. Esto último involucra la sección transversal del material.

Para calcular el número de resortes, basta conocer la distancia interatómica **d**. El número de tiras de resortes está dado por $N_{transversal}$ = **A/d**^{2} . (Ver Figura, donde hemos supuesto una sección transversal cuadrada para facilitar los cálculos.)

Lo mismo se puede hacer para calcular cuántos resortes en serie en cada cadena es preciso considerar. Esto es **L/d = N**$_{cadena}$.



En la realidad, al elongar un alambre, su diámetro disminuye. Este efecto no aparece en este modelo porque hemos eliminado los resortes transversales.

VIII.3.1. El Músculo como un Resorte

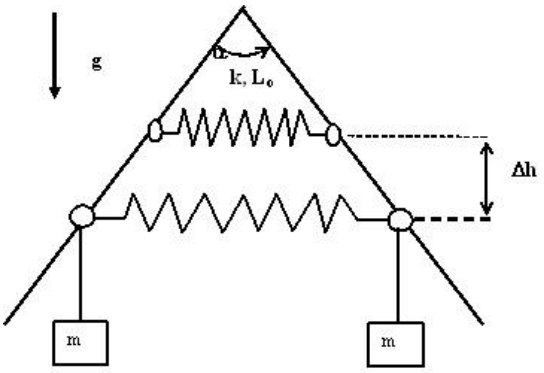
Los músculos generan dos tipos de fuerza: una fuerza activa a través de la contracción y una fuerza pasiva donde no existe contracción. La fuerza siempre está en la forma de tensión, los músculos siempre se acortan. Para volver a su posición normal debe existir otro músculo que actúe en oposición. No pueden ni empujar ni torcer. Otra característica es que pueden contraerse rápidamente pero deben ser elongados lentamente. Cada filamento de músculo estriado puede ejercer una fuerza de 530×10^{-9} Pascal. Existen alrededor de 5.7×10^{14} de estos filamentos por metro cuadrado de sección transversal en un músculo. De esta forma puede ejercer una fuerza de 300 kPa. La máxima fuerza que puede ejercer un músculo ocurre cuando no existe desplazamiento. Al contraerse, la velocidad incorpora una disipación y se gasta parte de la energía.
La velocidad **V** con que los músculos pueden contraerse fue enunciada por A. V. Hill (1938)

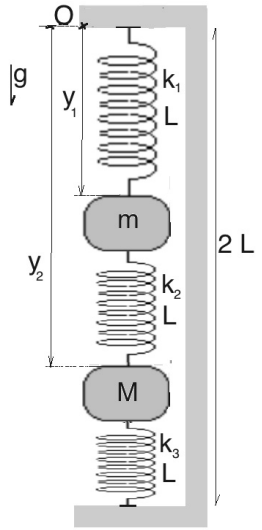
$$V = b\,\frac{F_o - F}{F + a}, \tag{VIII.14}$$

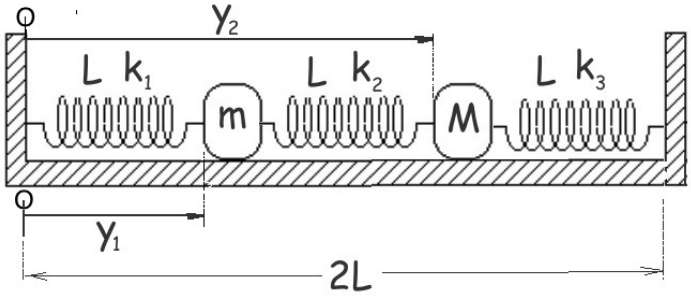
donde $\mathbf{F}_o$ es la tensión máxima que puede ejercer, **a** y **b** son constantes cuyas dimensiones corresponden a la de fuerza y velocidad, respectivamente. Se puede constatar que para el máximo valor de la fuerza F_o, la velocidad es nula.

VIII.4. EJERCICIOS

1.– Un alambre tiene forma de **V** invertida. Mediante unos anillos sin roce se instala un resorte de largo natural L_0 y constante **k**. De estos mismos anillos se cuelgan dos masas idénticas **m**, como se señala en la Figura. Si estas masas se depositan suavemente, el alambre se alarga y baja hasta alcanzar una posición de equilibrio. Dado los valores: del ángulo superior α, k, m, L_0 y g. Encuentre el valor de **h** .



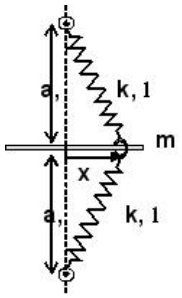


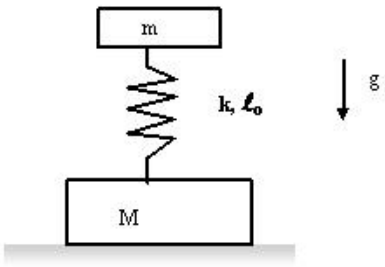


2.– Se tiene un sistema de dos masas **m** y **M**, puntuales, que están colgadas verticalmente de la forma que indica la figura. Si los resortes son iguales y cada uno tiene un largo **L** y constante de rigidez **k**, encuentre a qué distancia de la superficie superior se ubica cada una de las masas. Las masas están en reposo. Para comprobar su resultado, haga m=0, y compruebe la respuesta anterior. Calcule lo mismo en el caso que **M**=0.

3.– En el sistema de la figura aparecen dos resortes idénticos unidos en el extremo común por

un anillo de masa **M**. este anillo se puede deslizar sin roce a lo largo de la barra horizontal. No considere el peso del anillo.
Encuentre el punto de equlibrio (el valor de **x**) del sistema de resortes para los casos
i.- $\ell <$ a,
ii.- $\ell = a$,
iii.- $\ell > a$.





4.– Dos masas **M** y **m**, están unidas por un resorte de largo natural ℓ_0 y constante k. Permanecen en posición vertical como se indica en la Figura. Cuando el sistema está en reposo,
a.- ¿Cuál es la reacción del piso sobre **M**?

b.- ¿Cuánto se acortó el resorte debido al peso de **m**?

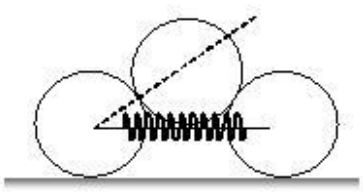
c.- ¿Cuánto debo hundir la masa **m** para lograr -apenas-, levantar la masa **M** del piso?

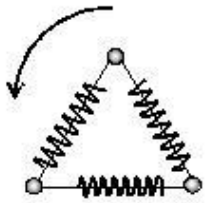
d.- Suponga que invierto el sistema, la masa **m** queda bajo la masa **M**. ¿Cuánto debo hundir la masa **M** para que la masa **m** esté a punto de levantarse
del piso.

e.- Considere el caso c.-, ¿Cuál es la aceleración instantánea que tiene la masa **m** en el instante que está a punto de levantar la masa **M**?

5.– Los tres cilindros de la figura tienen la misma masa **M**, radio **R** y las superficies tienen roce despreciable. El largo natural del resorte, de constante de rigidez **k**, es **2 R** y sus extremos se fijan en los ejes de los dos cilindros ubicados sobre el piso. Si el cilindro superior se deposita *lentamente*, para evitar que aparezcan oscilaciones, los cilindros de la base se separan y el resorte se estira hasta que la recta que une el eje del cilindro superior con el de la base, forma un ángulo Φ, desconocido. Encuentre una ecuación que permita calcular este ángulo en función de los parámetros conocidos del problema.

Indicación: Usando los métodos de aproximación para la función seno y coseno estudiados al comienzo del libro, encuentre un valor aproximado para el ángulo Φ. Para ello suponga que el triángulo que une los tres ejes del sistema se deforma muy poco y que lo podemos escribir como $\Phi = 60^o + \gamma$ con $\gamma << 1$, medido en radianes.





6.– Tres resortes idénticos de rigidez elástica **k** y largo natural **L**, se unen en sus extremos formando un triángulo equilátero. En cada uno de los vértices de este triángulo se instala una masa **m**. El sistema se coloca sobre una mesa plana con roce despreciable y se la hace girar con velocidad angular ω.

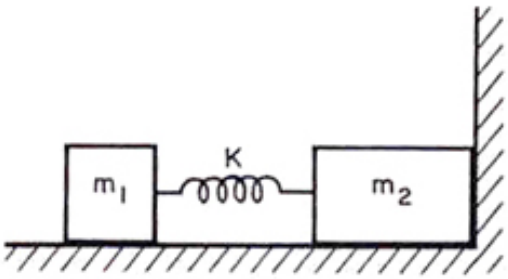
Transcurrido un tiempo los resortes se alargan y el nuevo triángulo equilátero adopta un nuevo valor para el largo de sus lados. Calcule este nuevo valor.

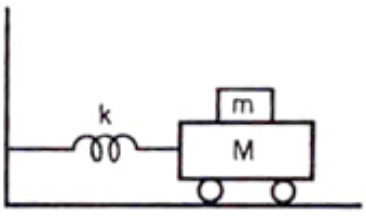
7.– Dos masas distintas $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}$ y $\mathbf{m}_2 = \mathbf{2\,m}$, se ubican sobre una mesa sin roce. Se instala un resorte de constante **k** entre las dos masas y es comprimido una distancia **d**, con $\mathbf{m}_2$ pegado a la pared. Repentinamente el sistema es abandonado desde el reposo.

a.- Encontrar la distancia que viaja $\mathbf{m}_1$ antes que $\mathbf{m}_2$ comience a moverse.

b.- Si cambiamos la posición de las masas de modo que $\mathbf{m}_1$ queda apoyada en la pared: ¿Cuánto avanzará $\mathbf{m}_2$, antes que $\mathbf{m}_1$ pierda contacto con la pared?

c.- ¿ En cuál de estas dos configuraciones señaladas ocurre antes el despegue de la pared? ¿O es el mismo para ambos casos? Utilice argumentos físicos, para avalar su respuesta. No necesita calcular, no se pide una respuesta cuantitativa.



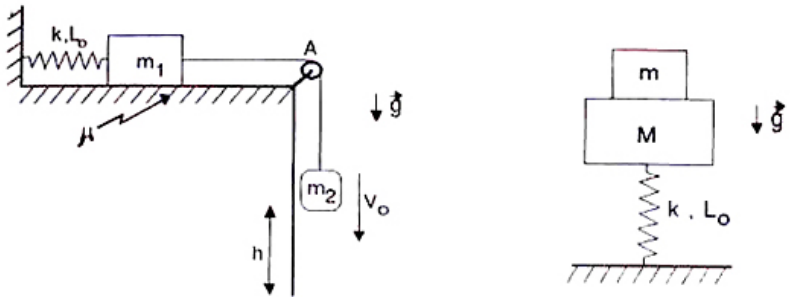


8.– Dado el oscilador mecánico mostrado en la Figura. Encontrar la amplitud máxima de oscilación para que la masa superior no resbale sobre **M**. El coeficiente de fricción estática entre las dos masas es μ.

9.– Considere un bloque de masa **M** fijo a un resorte vertical de constante **k** y largo natural $\mathbf{L}_o$.

Sobre el bloque se coloca otro bloque de masa **m** . Inicialmente se comprime el resorte una distancia **d** con respecto a la posición de equilibrio del sistema resorte-masa **M**.

Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa **m** una vez que se libera el resorte.



Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[3] Retrato de Hooke: www.newscientist.com/blogs/shortsharpscience/2012/01/hooke-springs-to-life-in-new-p.html

[4] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A DE C., México, Primera reimpresión, 1996.

[5] **Understanding Physics** K. Cummings, P. Laws, E. Redish and P. J. Cooney, John Willey and sons Inc., 2004. Tiene excelentes ilustraciones, buenos problemas y ejemplos.

VIII.5. PROBLEMAS RESUELTOS

Solución del Problema # 4

Para que la reacción sobre el bloque de masa **M** se anule, el resorte debe estar con un largo mayor que su largo natural. La fuerza que ejerce la masa sobre el piso es **F = M g**, el piso reacciona con una fuerza de la misma magnitud pero de sentido opuesto.

Para que la reacción del piso se anule, el peso de la masa **M g** debe ser sostenido por el resorte, que en dicho instante el momento debe estar alargado un tramo Δ medido a partir del largo natural de este resorte.

Para generar esa fuerza el resorte se debe alargar $\Delta = \dfrac{M\,g}{k}$. Como en el instante inicial el resorte soporta, en reposo, a la masa **m**, su altura ha disminuido en δ con $\delta = \dfrac{m\,g}{k}$. El largo del resorte con respecto al piso es z = ℓ_o - δ.

Como el resorte oscila alrededor de este nuevo nivel, la amplitud mínima de oscilación se mide a partir de ese largo y debe ser

$$\Delta + \delta = \frac{(M+m)\,g}{k}.$$

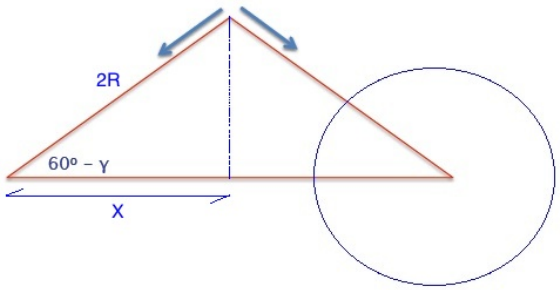
Como se aprecia, el resultado es simétrico con respecto a las masas: es la suma de ambas. Si se invierte el sistema, el resultado será el mismo: el resorte se hunde una cantidad Δ para soportar la masa **M** y para tirar la masa **m** con un fuerza **m g**, debe alargarse δ sobre su largo natural. El alargue total es igual al anterior. □

Como una forma de entender mejor este razonamiento, considere el problema de un resorte cuya base está en el piso y que sostiene una masa, que la designamos como **M**, fija al resorte. Sobre esta masa instalamos otra **m**, sobrepuesta a **M**. ¿Cuánto debo hundir el resorte para que la masa **m** esté a punto de saltar de **M** ? (Ver Problema #9 de esta guía?

Solución del Problema # 5

Al separarse los cilindros de la base, el triángulo isósceles inicial formado uniendo los tres ejes de los cilindros, disminuye su valor inicial de 60^o a un ángulo $\Phi = 60^o - \gamma$. Determinar este valor de Φ resuelve este problema. Es Nuestra incógnita. Más adelante introducimos γ en los cálculos.

El DCL del cilindro apoyado en los dos del piso, nos da una ecuación, puesto que la componente horizontal es simétrica.



$$\text{Componente Vertical:} \qquad 2\,T\,\operatorname{sen}\Phi\,-\,M\,g\,=\,0, \quad \Rightarrow \quad T\,=\,\frac{M\,g}{2\,\operatorname{sen}\Phi}.$$

Necesitamos conocer cuánto se alarga el resorte para determinar la configuración final que alcanzan los tres cilindros. Para ello sólo se requiere resolver la componente horizontal del DCL de uno de los cilindros en la base. Por acción y reacción la fuerza **T** actúa tratando de estirar el resorte. Cuando se alcanza el equilibrio, tenemos

$$-\,T\,\cos\Phi\,+\,F_o\,=\,0.$$

Donde $\mathbf{F}_o$ es la fuerza que provoca el resorte.

De la Figura tenemos que x = 2 R $\cos\Phi$. El alargamiento del resorte con respecto a su largo natural es [2 x - 2 R = 2 R (2 $\cos\Phi$ - 1)]. Usando este resultado tenemos

$$k\cdot[2\,R\,(2\,\cos\phi-1)]\,=\,T\,\cos\Phi\,=\,\frac{M\,g\,\cos\Phi}{2\,\operatorname{sen}\Phi}.$$

Con este resultado estamos en condiciones para determinar el ángulo Φ, nuestra incógnita.

$$\cos\Phi\, Mg \;=\; 4\,R\,k\,(2\,\cos\Phi - 1)\,\operatorname{sen}\Phi \quad \Rightarrow \quad (2\,\cos\Phi\,-\,1)\frac{\operatorname{sen}\Phi}{\cos\Phi} \;=\; \frac{M\,g}{4\,R\,k}. \qquad \text{(VIII.15)}$$

Analicemos esta expresión. Si $\Phi = 60°$, no existe deformación del sistema de cilindros, permanece como si no tuviera un cilindro encima ($\cos 60^o \;=\; 1/2$). Esto corresponde a M g = 0, o a una constante de rigidez infinita del resorte **k** $\rightarrow\; \infty$.

Si Mg no es nulo, el ángulo Φ debe disminuir, por tanto $\cos(\Phi\;-\;\epsilon) > 1/2$.

Si escribimos la ecuación VIII.15 en la variable $\cos\Phi$ llegamos a una ecuación cúbica. para no transformar este problema en uno de álgebra y porque además es más instructivo, suponemos que l sistema se deforma muy poco. Esto es equivalente a suponer que **k**>>1 , de modo que $\dfrac{M\,g}{4\,R\,k} \simeq \epsilon$ con $0 < \epsilon << 1$.

Resolvemos este caso, esto es suponemos que $\Phi \;=\; 60°$ cambia un poco y toma el valor $\Phi \;=\; 60^o - \gamma$, con γ muy pequeño.

Resolvemos esta ecuación para el caso

$$2\cos\Phi\cdot\frac{sen\Phi}{\cos\Phi} - \tan\Phi = 2\,\operatorname{sen}(60°\;-\;\gamma) - \tan(60°-\gamma)$$

$$\begin{aligned}
sen(60°-\gamma) &= \operatorname{sen}60°\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma\cos 60° \simeq \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma \\
\cos(60°-\gamma) &= \cos 60°\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma sen60° \simeq \tfrac{1}{2} + \gamma\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan(60°-\gamma) &\simeq \frac{\sqrt{3}-\gamma}{1+\sqrt{3}\gamma} \simeq (\sqrt{3}-\gamma)(1-\sqrt{3}\gamma) \simeq \sqrt{3} - 3\gamma - \gamma \\
\tan(60°-\gamma) &\simeq \sqrt{3} - 4\gamma \qquad (\text{con } \gamma \text{ en radianes}). \\
2\,\operatorname{sen}(60°-\gamma)\;-\;\tan(60°-\gamma) &\simeq (\sqrt{3}-\gamma) - \sqrt{3} + 4\gamma \\
&\simeq 3\gamma \qquad (\gamma \text{ en radianes})
\end{aligned}$$

Para pequeñas deformaciones

$$3\gamma \;=\; \frac{M\,g}{4\,k\,R} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma \;=\; \frac{M\,g}{12\,k\,R} \text{ radianes} \quad \square$$

Solución Problema #2

Se analizará un sistema de dos masas puntuales **m** y **M**, que están sostenidas mediante tres resortes ideales. La distancia entre ambos extremos fijos es **2 L**.

Consideraremos este sistema en tres situaciones diferentes.

a.- Suponga que el sistema está colocado horizontalmente apoyado en un piso sin roce y que los tres resortes tienen la misma constante de rigidez **k** y el mismo largo natural **L**.

Si insertamos este sistema de largo natural **3 L** en el espacio entre las dos paredes fijas: Encuentre cuánto se comprime cada resorte. Las dos masas permanecen en reposo.

Para resolverlo utilice dos métodos: primero use la simetría del sistema y después utilice la información proporcionada por los DCL de cada masa.

b.- Lo mismo que el caso anterior, pero ahora considere que el resorte ubicado en el centro tiene una rigidez elástica mayor que la de los otros dos resortes $\mathbf{K} > \mathbf{k}$.

c.- Resuelva la parte a.- pero con el sistema de resorte ordenados en forma vertical. Debe considerar el peso de las masas. Escriba las ecuaciones que sirven para determinar la posición de cada una de las masas referidas a uno de los extremos fijos.

Para comprobar su resultado, haga $m = 0 = M$ y compare su respuesta con el caso a.- .

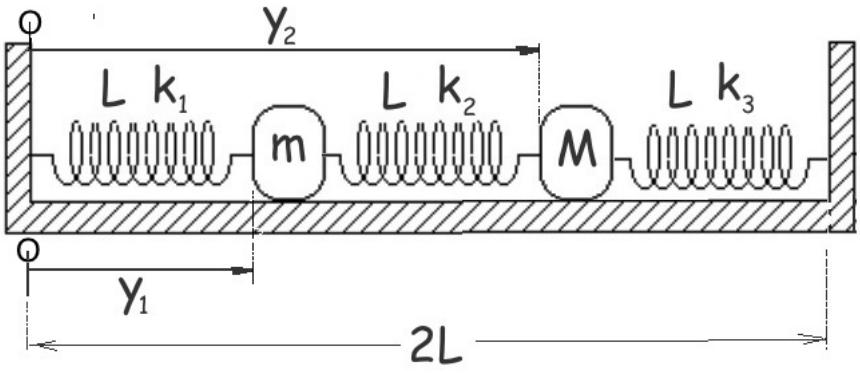


Figura VIII.7: *Sistema de coordenadas que usaremos en la solución del problema y características de los resortes. Los dos extremos están fijos y separados por una distencia* **2 L**.

Solución

a.- Cada resorte se caracteriza por **k** y **L**. Son los 3 iguales, a pesar que en la figura aparecen, cada uno, con una rigidez elástica diferente.

Resolveremos este problema, primero, usando **SIMETRÍA**: Como los 3 resortes son idénticos, cada uno debe comprimirse tanto como su vecino. Si la distancia entre ambos extremos es **2 L** y cada uno de los resortes adquiere un largo **L -** Δ al comprimirse, de modo que podemos determinar el valor de Δ al igualar los largos de los resortes y el de la distancia entre las paredes: **3 (L -** Δ**)** = 2 L.

$$L = 3\Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{L}{3}.$$

NOTA: Las masas quiebran la simetría **pero**, como es estático y estamos considerando la situación horizontal sin roce, no influyen en este resultado.

Resolvamos este mismo problema de la forma convencional, usando el **DCL**.

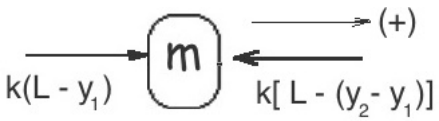
Mediremos la posición de las masas tomando origen en la pared de la izquierda: $\mathbf{y}_1$ es la posición de la masa **m**. $\mathbf{y}_2$: indica la posición de **M** .

Analicemos el DCL de la masa **m**. Sobre esta masa actúan dos resortes. Debemos analizar las dos fuerzas que actúan.

Como el primer resorte se comprime, entonces se cumple: $(L - y_1) > 0$.

Para el segundo resorte, ocurre que $(y_2 - y_1) <$ L, porque el resorte central también está comprimido. El módulo de la fuerza que ejerce este resorte es $|F| = k\,[L - (y_2 - y_1]$ y apunta hacia la izquierda. A partir del DCL, tenemos

$$-\,k\,[L - (y_2 - y_1)] + k\,(L - y_1) = 0.$$

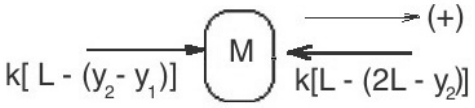


Después de simplificar, obtenemos la primera ecuación

$$-\,2\,y_1 + y_2 = 0. \qquad \text{(VIII.16)}$$

El DCL para la segunda masa **M**

$$k\,[L - (y_2 - y_1)] - k\,[L - (2L - y_2)] = 0.$$



La ecuación obtenida es

$$-\,y_1 + 2\,y_2 = 2\,L. \qquad \text{(VIII.17)}$$

Si despejamos y_1 e y_2 tenemos

$$y_1 = \frac{2}{3}L, \qquad y_2 = \frac{4}{3}L$$

NOTA: De estos resultados podemos encontrar el valor de Δ. $y_1 \equiv L - \Delta \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}L = L - \Delta \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{L}{3}$

Para el resorte inserto entre los otros dos,

$$y_2 - y_1 = L - \Delta \;\Rightarrow\; \frac{4}{3}L - \frac{2}{3}L = L - \Delta \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{L}{3}$$

b. Usamos la simetría del sistema para resolverlo. Los resortes de ambos extremos se acortan lo mismo (por simetría) y denominamos el acortamiento de cada uno como Δ. El acortamiento del resorte interior, no puede ser el mismo que el experimentado por cada uno de sus vecinos. Lo denominamos $\bar{\Delta}$. Ajustando los largos del sistema comprimido y la distancia entre los extremos

$$2\,(L - \Delta) + (L - \bar{\Delta}) = 2\,L \;\Rightarrow\; 2\,\Delta + \bar{\Delta} = L. \tag{VIII.18}$$

esta es la única simetría que podemos utilizar en este caso. Como tenemos dos incógnitas, necesitamos otra ecuación. Usamos el DCL para obtener esta ecuación adicional. Esto es directo ya que el DCL es el mismo utilizado en las ecuaciones **??** o **??** y obtenemos

$$-K\,[L - (y_2 - y_1)] + k\,[L - y_1] = 0, \;\Rightarrow\; -K\,\bar{\Delta} + k\,\Delta = 0. \tag{VIII.19}$$

Despejando Δ y $\bar{\Delta}$ entre las ecuaciones VIII.18 y VIII.19 se obtiene

$$\Delta = \frac{L}{(2 + \dfrac{k}{K})}, \qquad \bar{\Delta} = \frac{\dfrac{k\,L}{K}}{(2 + \dfrac{k}{K})}. \tag{VIII.20}$$

Note que si $k = K$, re-obtenemos el resultado de la parte a.- , con $\Delta = \frac{L}{3}$.

Por otra parte, si K >> k, de forma que k/K $\to 0$, tenemos que $\bar{\Delta} \approx 0$ y $\Delta = L/2$. Lo cual es correcto ya que la barra del medio preserva su largo **L**, de modo que las otras dos se deben acortar $L/2$ para insertarse entre los dos extremos fijos.

Nota: Es importante comprobar la consistencia de los resultados cuando éstos han sido obtenidos mediante estrategias diferentes. Al igual que obtener los casos límites a partir de un resultado general. Esto permite entender mejor los procedimientos y tener seguridad acerca de los resultados obtenidos.

Es una herramienta adicional a la más relevante, que es comprobar si las dimensiones del resultado obtenido son las correctas.

c.- Analizaremos el caso de tres resortes dispuestos verticalmente con constante de rigidez diferente, pero con el mismo largo natural: . más general : (k_1, L), (k_2, L), (k_3, L). El sistema sostiene dos masas **m** y **M**, como aparece en la Figura.

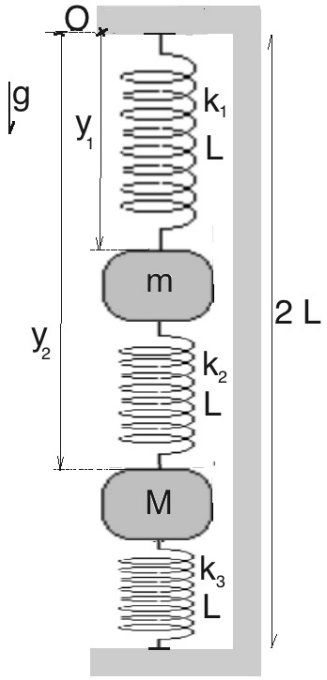
Como la distancia entre los extremos fijos es **2 L**, los resortes permanecen comprimidos.

El DCL de la masa **m**.
Como el resorte intermedio está comprimido, empuja la masa **m** hacia arriba, con un fuerza $k_2\,[L-(y_2-y_1)]$. El peso de **m** y la compresión del primer resorte, empujan la masa **m** hacia abajo $m\,g\,+\,k_1\,(L-y_1)$. La ecuación de equilibrio es

$$m\,g\,+\,k_1\,(L\,-\,y_1)\,-\,k_2\,[L\,-\,(y_2-y_1)]\,=\,0. \quad \text{(VIII.21)}$$

El DCL de la masa **M**.
La compresión del resorte inferior, origina una fuerza hacia arriba sobre la masa **M**: $k_3\,[L\,-\,(2\,L\,-\,y_2)]$. De forma análoga al caso anterior, el resorte intermedio empuja la masa **M** hacia abajo con una fuerza $k_2\,[L\,-\,(y_2\,-\,y_1)]$. La ecuación de equilibrio, incluyendo el peso de la masa **M** es

$$M\,g\,+\,k_2\,[L\,-\,(y_2\,-\,y_1)]\,-\,k_3\,[L\,-\,(2\,L\,-\,y_2)]\,=\,0. \quad \text{(VIII.22)}$$



Antes de proseguir el cálculo conviene comprobar que no existe un error. Para ello ponemos **m = M = 0** y $k_1 = k_2 = k_3$. En este caso podemos comprobar que las ecuaciones anteriores se reducen a

$$(L-y_1)-[L-(y_2-y_1)]=0 \Rightarrow -2y_1+y_2=0 \quad (\text{ Corresponde a la ecuación VIII.16 })$$

$$[L\,-\,(y_2\,-\,y_1)]\,-\,(L-y_1)\,=\,0 \quad \Rightarrow y_2\,+\,y_1\,=\,2 \quad (\text{ Corresponde a la ecuación VIII.17 }).$$

Resolver las ecuaciones originales VIII.21 y VIII.22, no es complejo pero tedioso. Hacerlo nos permite acceder a la solución general del sistema, a partir de la cual podemos obtener casos particulares y poder comprobar si obtuvimos la respuesta correcta.

Ordenando las ecuaciones tenemos

$$-\,(\,k_1+k_2)y_1+k_2y_2\,=\,(k_2-k_1)L-mg, \quad \text{ecuación correspondiente a } \mathbf{m}\,,$$
$$k_2\,y_1-(k_2+k_3)\,y_2\,=\,-(k_3+k_2)\,L-M\,g, \quad \text{ecuación correspondiente a } \mathbf{M}\,.$$

Despejando y_1 e y_2 de las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$y_1\,=\,L-\frac{k_2\,k_3}{k_1\,k_2+k_1\,k_3+k_2\,k_3}L\,+\,\frac{k_2\,M\,g+(k_2\,+\,k_3)\,m\,g}{k_1\,k_2+k_1\,k_3+k_2\,k_3}, \quad \text{(VIII.23)}$$

$$y_2 \;=\; L + \frac{k_1\,k_2}{k_1\,k_2 \;+\; k_1\,k_3 \;+\; k_2\,k_3}\,L \;+\; \frac{(k_2+k_1)\,m\,g \;+\; k_2\,M\,g}{k_1\,k_2 \;+\; k_1\,k_3 \;+\; k_2\,k_3}. \qquad \text{(VIII.24)}$$

A continuación analizaremos algunos casos límites utilizando las excreciones anteriores.

Si $k_3 \to \infty$, el resorte inferior se transforma en una barra rígida, y **M = 0**, ya que no interviene en las ecuaciones de equilibrio,

$$\Rightarrow y_1 \;=\; L \;-\; \frac{k_2}{k_1+k_2}\,L + \frac{m\,g}{(k_1 \;+\; k_2} + 0 \;=\; \frac{k_1}{k_1+k_2}\,L + \frac{m\,g}{(k_1 \;+\; k_2)}, \qquad (\text{ya que } \; M\,g \;=\; 0).$$

En este límite, la segunda ecuación toma la forma $\Rightarrow \;\; y_2 \;=\; L$.

El resultado es consistente: **M** está fijo y a una distancia **L** del extremo superior, por tanto y_2 **= L**.

Este resultado se puede obtener directamente desde la ecuación VIII.17 haciendo $k_3 \to \infty$ en la ecuación. Para que se cumpla la ecuación, necesariamente y_2 **= L**.

y_1 también se puede obtener de VIII.16, insertando y_2 **= L**, en dicha ecuación:

$$y_1 \;=\; \frac{k_1}{(k_1+k_2)}\,L \;+\; \frac{mg}{(k_1 \;+\; k_2)}.$$

Veamos otra situación particular dentro de este mismo caso. Supongamos que, además, ocurre $k_1 \;=\; k_2$. En este caso $y_1 \;=\; \dfrac{L}{2} \;+\; \dfrac{m\,g}{2\,k_2}$. Podemos comparar este resultado con el obtenido previamente (ver VIII.8) en un caso similar (no exactamente igual!).

Consideremos otro caso. Consideremos otro caso límite: $k_2 \;\to\; \infty$. Físicamente esto corresponde a cambiar el resorte intermedio por una barra sin masa, y completamente rígida.

En este límite **m** y **M**, se comportan como una sola masa. Debe cumplirse la ecuación anterior con **m** $\to$ **(m + M)**.

De las ecuaciones VIII.23 y VIII.24, obtenemos

$$\begin{aligned} y_1 \;\;&=\;\; L \;-\; \frac{k_3}{k_1 \;+\; k_3}\,L \;+\; \frac{(m+M)g}{(k_1 \;+\; k_{3)}}, \\ y_2 \;\;&=\;\; L \;+\; \frac{k_1}{(k_1 \;+\; k_3)}\,L \;+\; \frac{(m+M)g}{(k_1 \;+\; k_3)}. \end{aligned}$$

Se puede verificar que $\mathbf{y}_2$ - $\mathbf{y}_1$ **= L**. O escrito de otra forma $\mathbf{y}_2$ **=** $\mathbf{y}_1$ **+ L**, que es lo esperado: las dos masas se desplazan la misma distancia y, por tanto, $\mathbf{y}_2$ está a una distancia adicional **L** de $\mathbf{y}_1$. □

Capítulo IX

OSCILADOR ARMÓNICO

IX.1. INTRODUCCIÓN

Al deducir la ley de Hooke, se procedió a colgar -consecutivamente-, masas iguales desde su extremo libre, graficando la fuerza aplicada versus el alargue experimentado por el resorte. El proceso debe realizarse lentamente para evitar que el sistema comience a oscilar. Este es el caso estático.

Analizaremos a continuación la dinámica de un resorte ideal y una masa unida a su extremo. Se comprime -por ejemplo-, el sistema y se deja libre. El movimiento que se observa son oscilaciones y se denomina movimiento armónico simple.

En este escenario, la segunda ley de Newton se traduce en

$$m\,a = -k\,x, \tag{IX.1}$$

donde a$\equiv$ aceleración de la masa **m** medida a lo largo del eje **x** que es el eje del resorte. En este movimiento la aceleración es proporcional a la posición de la masa **x** , pero con el signo opuesto. Esto marca la diferencia con el caso estudiado inicialmente de aceleración constante: $a_y = g$, por ejemplo. Esta condición genera una trayectoria parabólica: $\mathbf{y(t)} = y_o + v_{oy}\,t + (1/2)\,g\,t^2$.

Este es el caso con más aplicaciones en toda la física. Es típico encontrar un punto de equilibrio de un sistema y calcular las pequeñas oscilaciones alrededor de este punto.

Consideramos el movimiento en una dimensión, horizontal y sin roce en esta primera etapa.

Además supondremos que la ley de Hooke, encontrada estudiando el caso estático, se aplica –sin cambios–, al movimiento donde existe aceleración. Los experimentos sirven para comprobar la validez (o falsedad) de esta suposición.

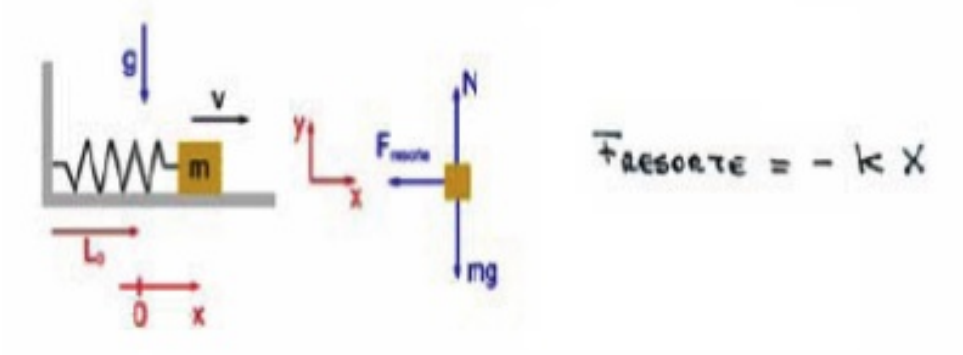


Figura IX.1: *Diagrama de cuerpo libre de una masa unida a un resorte ideal. La única fuerza externa horizontal, proviene del resorte y el sentido de esta fuerza siempre se opone al desplazamiento medido con respecto al punto de equilibrio* **O**. *Si el desplazamiento* **x** *es positivo, la fuerza apunta en el sentido negativo del eje x. Si es negativo, la fuerza del resorte apunta en el sentido positivo del eje x.*

El siguiente paso es resolver la ecuación de movimiento IX.1. Esta es una ecuación diferencial. La aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo y la igualdad en IX.1 exige que esta segunda derivada tome un valor proporcional al de la posición en cada instante.

Como no es requisito conocer ecuaciones diferenciales en este curso, resolveremos esta ecuación utilizando su analogía con el movimiento circular uniforme, donde -por ejemplo-, la proyección de su vector posición en el eje-x , cumple la misma ecuación que rige el movimiento del resorte IX.1. La componente en el eje-y, cumple una ecuación similar. Cualquiera de ellas se puede utilizar en el argumento que sigue.

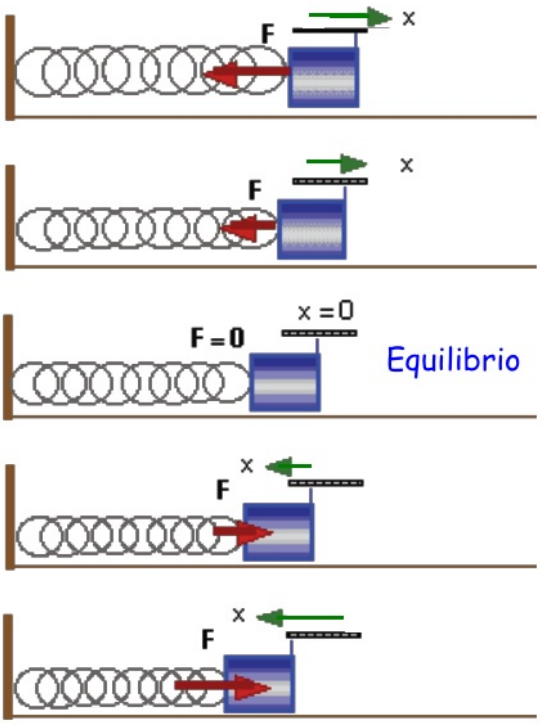
Ejemplo

Analice cualitativamente la ecuación de una masa acoplada a un resorte.

La ecuación del oscilador siempre se puede escribir como:
a(t) = - [k/m] x(t). Como **k** y **m** son positivos y por su analogía con el movimiento circular, como veremos a continuación, se acostumbra a definir $\omega^2 \equiv$ **k/m**. Podemos apreciar que si la partícula se ubica en el lado positivo del eje en algún instante: **x(t)** >0, la aceleración es negativa, va frenando el movimiento de la partícula hasta que la partícula se detiene (velocidad nula) y comienza a devolverse. A continuación, su velocidad apunta hacia el origen (es negativa) y va creciendo en módulo debido a que la aceleración apunta hacia el origen.

Una vez que alcanza el origen la aceleración desaparece en ese instante y posteriormente al comenzar a moverse en la región negativa del eje **x**, la aceleración de la partícula apunta en el sentido positivo del eje **x** y nuevamente la partícula comienza frenar su movimiento. El argumento anterior se repite y la partícula no puede escapar de una cierta región finita del eje **x(t)**.□

Para resolver la ecuación IX.1 se requiere conocer cálculo diferencial.
Afortunadamente, podemos resolverla utilizando una estrategia que explicamos a continuación y con la cual evitamos recurrir a la maquinaria del cálculo. Una parte del argumento es que esta ecuación diferencial m a = - k x , **tiene una solución única**, de modo que si encontramos una solución, cualquiera sea el método utilizado, es la solución buscada.
Esta afirmación es un Teorema que se demuestra en un curso de ecuaciones diferenciales. Es un resultado sólido.
La segunda parte es comprobar que la ecuación IX.1 efectivamente aparece en la descripción del movimiento circular uniforme. Esta demostración viene en la sección siguiente.



Las flechas indican la magnitud de la fuerza y el desplazamiento de la masa. La barra ubicada encima de la masa señala el desplazamiento del extremo de la masa.

IX.2. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

A continuación mostraremos que en la la cinemática del movimiento circular uniforme ocurre que la aceleración en -por ejemplo-, el eje-x, cumple la misma ecuación de la masa unida a un resorte ideal [IX.1].

La expresión para la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula con un movimiento circular con rapidez uniforme es (Ver Cap. V, Sección VI).

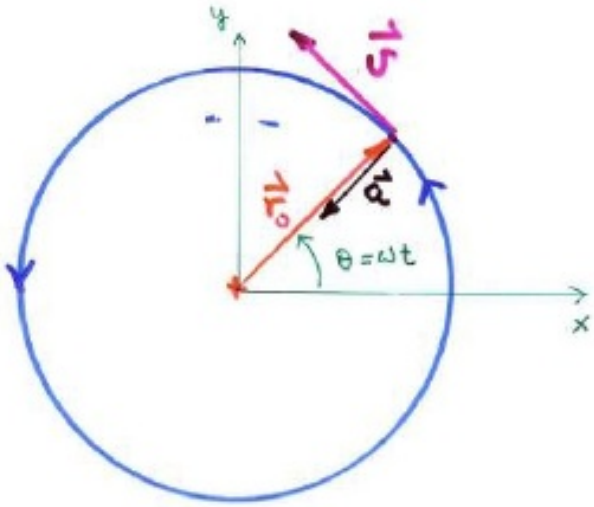
$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= A[\cos(\omega\, t\, +\, \Phi),\, \mathrm{sen}(\omega\, t\, +\, \Phi)], \\
\vec{v}(t) &= \omega\, A\,[-\,\mathrm{sen}(\omega\, t\, +\, \Phi),\, \cos(\omega\, t\, +\, \Phi)], \qquad \text{(IX.2)} \\
\vec{a}(t) &= -\omega^2\, A\,[\cos(\omega\, t\, +\, \Phi),\, \mathrm{sen}(\omega\, t\, +\, \Phi)] \,=\, -\omega^2\, \vec{x}.
\end{aligned}$$

Si nos concentramos en la última ecuación de IX.2, podemos identificar ω^2 del movimiento circular uniforme con k/m de la ecuación IX.1, resulta ser la misma ecuación que obtuvimos en el caso del resorte. El radio de la circunferencia es **A**, coincide con la amplitud de la oscilación de la masa atada al resorte.

En palabras, esta ecuación nos dice que en cada instante el valor de la aceleración debe ser proporcional a la posición de la partícula. El factor de proporcionalidad es $[\,-\omega^2\,]$.

Al tomar la primera componente de cada uno de estos vectores, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\,\cos(\omega\, t\, +\, \Phi), \\
v_x(t) &= -\omega\, A\,\mathrm{sen}(\omega\, t\, +\, \Phi), \qquad \text{(IX.3)} \\
a_x &= -\omega^2\, A\,\cos(\omega\, t\, +\, \Phi) = -\omega^2\, x(t).
\end{aligned}$$



Podemos identificar estas componentes como la proyección sobre el eje-x de los vectores correspondientes, como se aprecia en la figura adyacente.
Como las ecuaciones IX.3 representan también la dinámica del oscilador armónico, tenemos la solución analítica del problema del oscilador.

Expresado de otra forma, si ambas ecuaciones, la obtenida al estudiar el movimiento circular uniforme y aquélla que gobierna el movimiento de una masa unida a un resorte, son iguales, entonces tienen la *misma solución* $x(t) \,=\, A\,\cos(\omega\, t\, +\, \Phi)$.

Como estamos resolviendo un problema físico, cada una de las cantidades que aparecen en la ecuación debe representar una componente del sistema masa-resorte.

La constante **A**, representa la amplitud de la oscilación. La barra inmediatamente encima de la masa en la Figura IX.1. En el caso del movimiento circular uniforme, se identifica con el **radio** de la circunferencia en el movimiento circular uniforme.

Como se señaló anteriormente ω^2 se identifica con **k/m**, que proviene de las propiedades del resorte y la masa instalada en su extremo.

Ejercicio

Para poder identificar la amplitud de la oscilación con **A**, ambas deben tener las mismas dimensiones.

Compruebe que la frecuencia angular del movimiento circular uniforme ω^2, tiene las mismas dimensiones que que **k/m**, que proviene de la ecuación de movimiento del oscilador armónico.

□

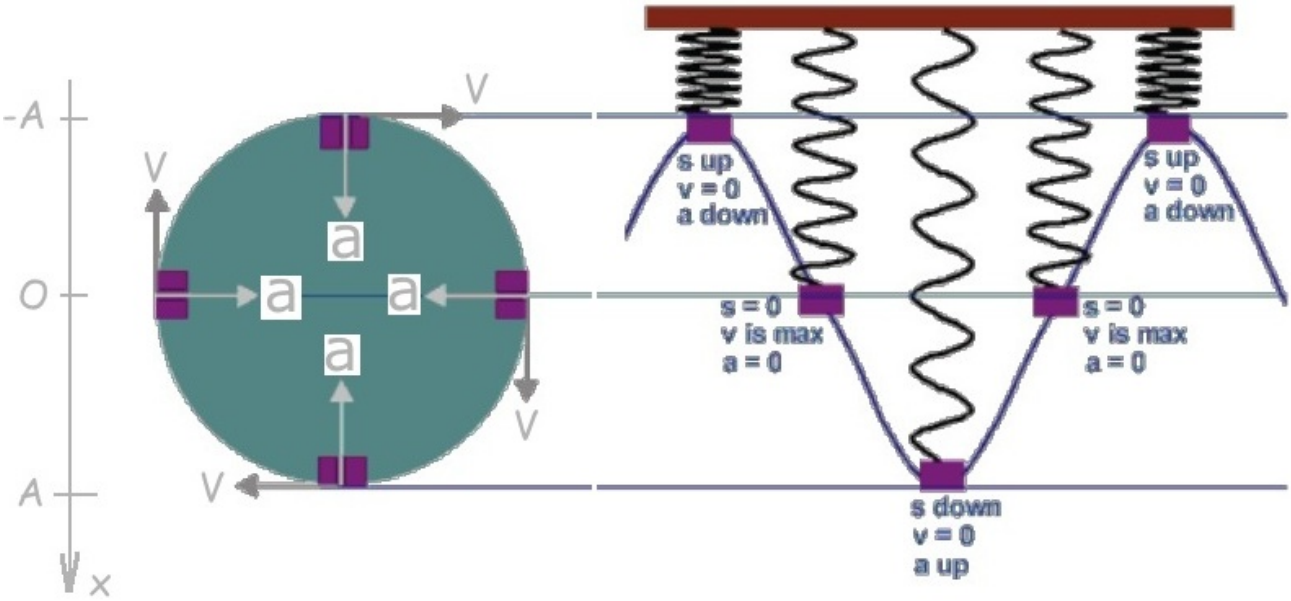


Figura IX.2: *Analicemos la identificación entre una partícula describiendo un movimiento circular uniforme (izquierda) y el movimiento armónico simple de una masa unida a un resorte (derecha). No existe gravedad en este caso. La equivalencia entre los dos movimientos se refleja en la armonía que existe entre la proyección de la posición y velocidad de la partícula en movimiento circular sobre el eje vertical, y la posición de la masa anclada al resorte en su movimiento armónico. (Ver una simulación en www.youtube.com/watch?v=9r0HexjGRE4)*

Si elegimos, arbitrariamente, nuestro eje de referencia: eje-**x**, apuntando hacia abajo, entonces el punto de máxima compresión del resorte (extremo izquierdo o derecho), coincide con el cuadrado superior de la circunferencia. La coordenada es **x = -A**. Análogamente, el punto de máxima elongación del resorte (figura del resorte en el medio) coincide con **x = +A**, el cuadrado más bajo en la circunferencia. El punto de equilibrio del resorte coincide con los puntos **x = 0** del movimiento circular.

Note que la velocidad nos indica en el sentido de giro de la partícula y debe estar sincronizado con la evolución de la masa unida al resorte.

Si estiramos un resorte de forma que **x = A** y en un instante arbitrario, que designamos como **t =**

0 se suelta, el resorte oscila en torno al punto de equilibrio con una frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$. Gráficamente se puede ver en la Figura, como la proyección del punto P sobre el eje x , oscila entre $-A$ y $+A$, a medida que el punto P da vueltas a la circunferencia. (El ángulo que describe el vector que apunta hacia P es lo que se denomina la *fase* de dicho movimiento).

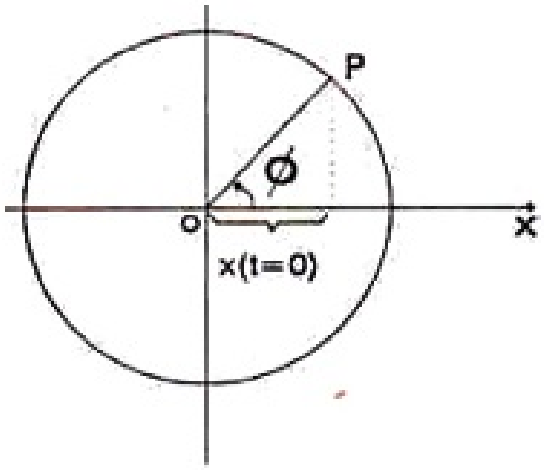
Sin embargo, ésta no es la situación más general. Puede ocurrir que al momento de empezar el movimiento, el punto P que representa a la posición inicial de la partícula en la Figura, no se ubique en el eje x sino que forme un ángulo ϕ con la horizontal, tal como se aprecia en la Figura.

En este caso debemos sumar el ángulo ϕ a $(\omega\, t)$ y la solución es:

$$x(t) = A\ \cos(\omega\, t + \phi), \qquad \text{(IX.4)}$$

con $\omega^2 \equiv \dfrac{k}{m}$.

Esta última ecuación es la solución más general de la ecuación [IX.1]. Todos los posibles casos que pueden ocurrir con un oscilador armónico se acomodan a esta expresión.



IX.3. CONDICIONES INICIALES

El problema del movimiento de una masa m atada a un resorte de constante k, masa nula y sin fricción, ya está resuelto. Su solución es la ecuación [IX.4]. Para usar esta expresión en cada uno de los casos particulares planteados en un ejercicio, debemos determinar los valores de las constantes A y ϕ, que aparecen en la ecuación [IX.4]. Estas dos constantes contienen la información acerca de la velocidad y la deformación del oscilador en el instante inicial.

La constante ω distingue un oscilador armónico de otro.

Para determinar A y ϕ debemos conocer las condiciones bajo las cuales se originó la oscilación, éstas se denominan las *condiciones iniciales* del problema.

Un problema está bien planteado si a partir de los datos que nos entregan se puede determinar, sin ambigüedades, A y ϕ.

Ejemplo

En el instante inicial, $t = 0$, el extremo de un resorte se encuentra en su punto de equilibrio $(x = 0)$, con una velocidad $(-V_0)$. Encontrar el valor de A y ϕ en este caso.

Estos son los datos típicos que se proporcionan para resolver un problema de oscilaciones.

En la solución general [IX.4], se debe ajustar los valores de A y ϕ para satisfacer estas condiciones iniciales:

$$x(t=0) = 0 = A\ \cos\ \phi\ \Rightarrow\ \phi = \frac{\pi}{2},$$

($A \neq 0$, puesto que si $A = 0$, *no* existe oscilación). Reemplazando en la ecuación general [IX.4], tenemos:

$$x(t) = A\ \cos(\omega\, t + \pi/2) = -A\ \text{sen}(\omega\, t).$$

La velocidad se encuentra sumándole $(\pi/2)$ al ángulo correspondiente al vector posición y multiplicando la amplitud por ω. (Recordemos que, en todo instante, $\vec{V}$ es perpendicular al vector posición).

$$V(t) = -A\,\omega\ sen[\omega\, t + \pi/2] = -A\,\omega\ \cos[\omega\, t].$$

Hemos usado las propiedades del seno y del coseno. (Ver Apéndice Matemático para mayores detalles).

Aplicamos ahora la condición inicial a la expresión de la velocidad. Se obtiene:

$$t = 0, \qquad V(t=0) = -V_0 = -A\,\omega\ \Rightarrow\ A = \frac{V_0}{\omega}.$$

Así , en este caso, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$x(t) = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)\ \cos(\omega\, t + \pi/2). \tag{IX.5}$$

Las dimensiones de V_0/ω son,

$$\left[\frac{V_0}{\omega}\right] = \frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{\left[\frac{1}{T}\right]} = L. \tag{IX.6}$$

Nota

Conviene destacar que el *movimiento armónico simple*, este es el nombre que recibe el movimiento que hemos estudiado, es fundamental en el funcionamiento de los relojes mecánicos porque ω, la velocidad angular, está determinada por la constante k del resorte y la masa m. Conocidos estos valores, la frecuencia queda ***fija***, sin depender de la forma cómo se inicia esta oscilación.

Ya sabemos resolver el problema de la oscilación de un sistema masa resorte en ausencia de fricción. El procedimiento consiste en determinar las constantes A y ϕ, a partir de las *condiciones iniciales* del problema. Como es una operación que se repite una y otra vez, conviene ilustrarla con distintos casos.

Ejemplo

Aplicamos una fuerza sobre un resorte de modo que se alarge X_0 metros, medidos a partir de su largo natural. Repentinamente lo soltamos. ¿Qué valor toman las constantes A y ϕ en este caso?

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{array}{lll} \text{En} \quad t=0: & x=X_0 & = A\,cos\,\phi, \\ & v=0 & = -A\,\omega\,sen\,\phi. \end{array}$$

Con estas ecuaciones A y ϕ quedan determinadas y podemos conocer la posición y la velocidad en cualquier instante posterior.

Si le hubiésemos dado un impulso (un golpe corto) justo cuando estaba en reposo, entonces las condiciones iniciales serían:

$$\begin{array}{lll} \text{En} \quad t=0: & x(t=0)=0 & = A\,cos\,\phi \;\Rightarrow \phi=\pi/2, \\ & v(t=0)=v_0 & = -A\,\omega sen\,\phi \;\Rightarrow\; A=-v_0/\omega. \end{array}$$

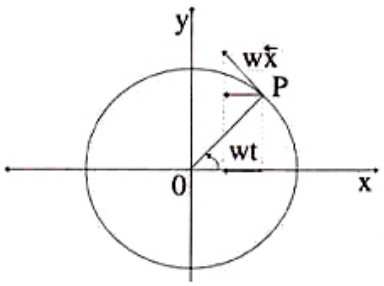


Figura IX.3: La velocidad se puede obtener geométricamente de la Figura. Es tangente a la circunferencia y su magnitud está dada por el producto del radio por la velocidad angular. La velocidad de la masa unida al extremo del resorte se obtiene proyectando $w\,r$ sobre el eje x.

Un impulso corresponde físicamente a un cambio repentino en el valor de la velocidad, sin afectar –en ese instante– a la posición, la cual permanece inalterada.

Sabemos que $v(t)$ es la derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo. Pero también se puede pensar (de acuerdo a la Figura [IX.3]), en una rotación en $\pi/2$ radianes con respecto al vector $\vec{x}(t)$ y además multiplicar el largo (módulo) del vector $\vec{x}(t)$ por ω.

Esta operación nos permite obtener gráficamente la velocidad en cualquier instante.

Ejercicio

Se tiene una masa unida a un resorte de constante k, que oscila sobre una mesa sin roce. Demuestre que si la posición en el instante $t=0$ es x_0, y su velocidad es v_o en el mismo instante, entonces las constantes A y ϕ, toman los siguientes valores:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}, \quad \tan\,\phi = -\frac{v_o}{\omega\; x_o}. \;\square \tag{IX.7}$$

Ejemplo.

Una partícula que realiza un movimiento oscilatorio armónico pasa consecutivamente a través de dos puntos separados por una distancia a, con la *misma velocidad* (en magnitud, dirección y sentido). El tiempo que tarda en recorrer el trayecto entre estos dos puntos es τ segundos.

Sabemos, además, que la partícula demora $2\,\tau$ segundos en pasar por el segundo punto, ahora con la misma velocidad (en dirección y magnitud), pero en *sentido opuesto*.

A partir de estos datos encuentre el período T y la amplitud A de este movimiento.

En este ejemplo, las condiciones iniciales para determinar las constantes A y ϕ no están dadas en forma simple y directa, como es lo usual en otros problemas. En otras palabras, conociendo a y τ, debemos determinar las constantes de movimiento A, ϕ, y la razón k/m del oscilador.

Notemos que la magnitud de la velocidad del oscilador en los puntos citados en el enunciado, *no* es conocida, sólo a y τ son datos. Otro punto, es la presentación de los datos iniciales: la distancia a y los tiempos aparecen en forma relativa. Esto nos permite definir la posición inicial del oscilador, el instante en que el tiempo comienza a contar, $t = 0$, como nos convenga más.

La posición y la velocidad están determinadas por:

$$x(t) = A\,\cos\,(\omega\,t + \phi) \qquad \text{y} \qquad v(t) = -A\,\omega\,\text{sen}(\omega\,t + \phi).$$

Usando la identidad trigonométrica: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$, podemos obtener una relación entre $x(t)$ y $v(t)$, válida para todo t:

$$x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega^2} = A^2 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \pm\sqrt{A^2 + \frac{v^2(t)}{\omega^2}}.$$

De esta última relación se deduce que si *la velocidad es la misma en los puntos P y Q* (Figura [IX.4]) entonces $x(t)$ –la proyección sobre el eje horizontal de estos dos puntos–, debe ser simétrica con respecto al origen.

De este resultado se desprende que debemos elegir ϕ de manera que el tiempo empiece a contar cuando el oscilador pasa por el origen: de esta forma las ecuaciones se simplifican. Tomando $\phi = \pi/2$ las expresiones para $x(t)$ y $v(t)$ se transforman en:

$$x(t) = A\,\text{sen}\,\omega\,t \qquad \text{y} \qquad v(t) = A\,\omega\,\cos\,\omega\,t.$$

Podemos comprobar directamente que para $t = 0$, $x(0) = 0$ y la velocidad es positiva $v(0) = A\,\omega$.

Según el enunciado, la distancia entre el punto P y Q es:

$$x(\tau/2) - x(-\tau/2) \equiv a = 2\,A\,\text{sen}\,\omega\,\tau/2.$$

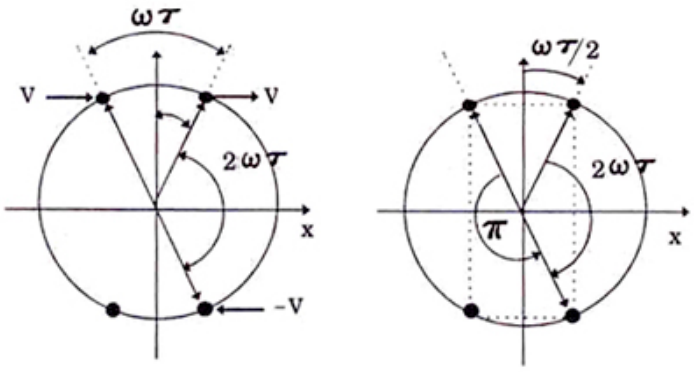


Figura IX.4: *El gráfico del movimiento circunferencial uniforme señala las condiciones que se han impuesto en la cinemática del problema (izquierda). La simetría del movimiento permite determinar que el ángulo descrito entre los puntos con velocidad v y $-v$, es $\omega\, 3\,\tau = \pi$.*

Donde hemos utilizado la igualdad sen$(-\alpha) = -$senα. Tenemos una ecuación y dos incógnitas: A y ω.

La siguiente ecuación proviene del dato acerca de la velocidad de retorno por Q. De la Figura [IX.4] se deduce que:

$$\omega\,\tau/2 + \omega\,\tau/2 + \omega\,2\,\tau = \omega\,3\,\tau = \pi.$$

Con esta ecuación tenemos el problema resuelto: $\omega = \pi/[3\,\tau]$ y $A = a/[2\,\mathrm{sen}(\pi/6)] = a$. La constante ϕ la fijamos al comienzo de la resolución.

$$x(t) = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3\,\tau}\,t\right).\ \square$$

Ejercicio

En el ejemplo anterior y usando sólo igualdades trigonométricas, demuestre que a partir de la condición:

$$v(\tau/2) = -v(\tau/2 + 2\,\tau) \quad \Longrightarrow \quad A\,\cos\,\omega\,\tau/2 = -A\,\cos[\omega\,(\tau/2 + 2\,\tau)],$$

se obtiene: $\omega\,\tau = \pi/3$, sin hacer uso de las propiedades geométricas exhibidas en la Figura [IX.4]. $\square$

IX.4. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La solución del oscilador armónico permite obtener la conservación de la energía directamente.

$$x(t) \,=\, A\,\cos(\omega\,t\,+\,\phi), \quad \text{y} \quad v(t) \,=\, -\,\omega\,A\,\text{sen}\omega\,t\,+\,\phi) \quad \text{con} \quad \omega^2 \,=\, k/m,$$

donde **A** es la amplitud de la oscilación: la máxima distancia que se aleja la partícula de su punto de equilibrio.

Recordando que $\cos^2\,\alpha\,+\,\text{sen}^2\,\alpha\,=\,1$ obtenemos

$$\frac{x^2}{A^2}\,+\,\frac{v^2}{\omega^2\,A^2}\,=\,1,.$$

Si multiplicamos esta ecuación por el factor $k\,A^2/2$ y reemplazamos ω^2 por k/m, obtenemos la forma canónica de la conservación de la energía. Esto es

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2\,+\,\frac{1}{2}\,m\,v^2\,=\,\frac{1}{2}\,k\,A^2\,\equiv\,E. \tag{IX.8}$$

La conservación de la energía se escribe como

$$\mathbf{T}\,+\,\mathbf{V}\,=\,\mathbf{E}, \quad \text{con} \quad \mathbf{T}\,\equiv\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{V(t)^2}, \quad \text{y} \quad \mathbf{V(x)}\,\equiv\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^2}, \tag{IX.9}$$

donde **T** es la Energía Cinética y **V**(x), la Energía Potencial. par Estas definiciones permiten evaluar los límites del movimiento del oscilador armónico sin resolverlo.

La ecuación IX.8 también se puede graficar en un sistema de referencia cuyos ejes sean la posición **x** y la velocidad **v**. El nombre técnico de este gráfico es **espacio de fase**. Se puede mostrar que esta curva es una elipse. Se puede escribir como x^2/a^2 + v^2/b^2 = 1. Para ello debo dividir la ecuación IX.8 por $(k\,A^2)/2$. Con esto podemos definir los números **a** y **b**. Veamos

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{\left[\dfrac{k\,A^2}{m}\right]}\,=\,1. \tag{IX.10}$$

Entonces $a\,\equiv\,A$ y $b\,\equiv\,\sqrt{k/m}\,A$.

El siguiente paso es un cambio de escala en cada uno de los ejes. Definimos $\bar{x}\,=\,A\,x$ y $\bar{v}\,=\,\sqrt{k/m}\,A\,v$. De esta forma tenemos la siguiente ecuación

$$(\bar{x})^2\,+\,(\bar{v})^2\,=\,1. \tag{IX.11}$$

La posición $\bar{x}(t)$ depende del tiempo, como es obvio al observar la oscilación generada por un resorte. Lo mismo sucede con la velocidad $\bar{V}(t)$, depende del tiempo.

IX.5. OSCILACIONES PEQUEÑAS

IX.5.1. Péndulo simple

El caso más representativo de las oscilaciones pequeñas es el de un péndulo simple. Este consiste de una masa m colgando de un hilo o de una barra de masa despreciable y que realiza pequeñas oscilaciones en un campo gravitatorio.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen en este caso (oscilaciones pequeñas), son similares a las de una masa atada a un resorte.

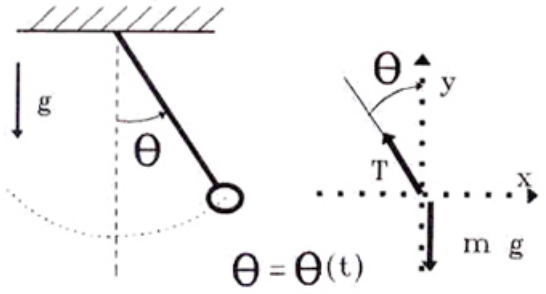


Figura IX.5: Una masa m suspendida de una cuerda de largo ℓ, oscila en un campo gravitatorio. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la masa m. El ángulo θ debe ser del orden de 5^o para usar la aproximación $sen\,\theta \approx \theta$.

La masa m está restringida a viajar a lo largo de la circunferencia, de manera que su desplazamiento sigue la tangente a la circunferencia en todo instante. Por lo tanto, el elemento de arco recorrido en un intervalo de tiempo por la partícula es:

$$\begin{aligned}
\Delta s &\equiv \ell\,\Delta\theta: && \text{elemento de arco recorrido en el intervalo } \Delta t,\\
\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \ell\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}: && \text{velocidad tangencial de la partícula,}\\
\frac{\Delta\left[\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right]}{\Delta t} &= \ell\,\frac{d^2\theta}{dt^2}: && \text{aceleración tangencial de la masa } m.
\end{aligned}$$

Donde ℓ es el radio de la circunferencia.

Del diagrama de cuerpo libre (ver Figura [IX.5]) se desprende que:

$$T\,\cos\,\theta - m\,g = m\,a_y, \quad \text{y} \quad -T\,\text{sen}\,\theta = m\,a_x.$$

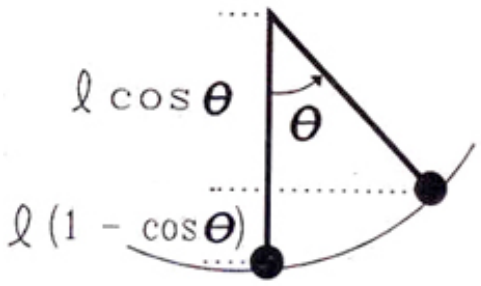
La ecuación de la izquierda es la segunda ecuación de Newton proyectada en la dirección vertical. T proviene de la tensión que ejerce la cuerda sobre la masa m.

La ecuación de la derecha es la proyección sobre el eje horizontal.

El siguiente paso consiste en simplificar las ecuaciones anteriores introduciendo la *aproximación* $\theta << 1$, con θ medido en radianes.

De acuerdo al desarrollo en serie de $\cos\,\theta$ y sen θ tenemos: $\cos\,\theta \;\approx\; (1-\theta^2/2, ...)$ y sen$\theta \;\approx\; \theta$.

Si despreciamos los términos que contienen θ^2, esta aproximación es equivalente a que el péndulo se mueva horizontalmente y despreciemos totalmente el movimiento vertical. De hecho, el cambio de altura de la masa m, desde la posición de equilibrio hasta el punto de máxima elongación es $\ell\,(1-\cos\,\theta)$, lo cual dentro del orden de aproximación adoptado aquí es: $\approx \ell\,\theta^2$, y por lo tanto podemos suponer que el péndulo *no se levanta.*



De aquí se desprende que no hay desplazamiento y, en consecuencia, no hay aceleración en dicha dirección: $a_y \approx 0$ y $a_x \;\approx\; a_{\text{tangencial}}$.

Con estas aproximaciones, la segunda ecuación de Newton queda:

$$T - m\,g = 0, \qquad \text{y} \qquad T\,\text{sen}\,\theta \approx T\,\theta = m\,a_{\text{tangencial}},$$

reemplazando la tensión en la ecuación de la derecha y la expresión encontrada anteriormente para la aceleración tangencial en a_x, se tiene:

$$m\,\ell\,\frac{d^2\,\theta}{d\,t^2} = -m\,g\,\text{sen}\,\theta \approx -m\,g\,\theta, \qquad \text{para valores pequeños del ángulo } \theta. \tag{IX.12}$$

Esta última ecuación es del mismo tipo que la ecuación de una masa que oscila unida a un resorte [IX.4]. En aquel caso la segunda derivada de la posición, la aceleración, era proporcional a la posición, aquí la segunda derivada del ángulo θ es proporcional al ángulo θ. Matemáticamente son idénticas, sólo necesitamos identificar ω como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

En esta ecuación, T es el período del péndulo. No es la tensión de la cuerda.

La ecuación de movimiento queda descrita por la siguiente fórmula:

$$\theta(t) = \theta_o\,\cos\,(\omega\,t + \phi). \tag{IX.13}$$

donde θ_0 es el máximo valor que puede tomar el ángulo θ en su oscilación y ϕ, al igual que en el caso anterior, está relacionado con las condiciones iniciales del péndulo. Esta ecuación es general, abarca todos los casos posibles de un péndulo con oscilaciones pequeñas.

Ejemplo.

A continuación mencionamos tres ejemplos en cuya resolución podemos usar como *modelo aproximado*, un sistema masa–resorte.

• El cable de acero que sostiene un peso en una grúa. Este cable se **estira** debido al peso y podemos modelarlo como un resorte ideal. Igual cosa sucede con el cable de acero que sostiene un ascensor que aparece en la otra Figura. Al comenzar a elevarse recibe un tirón desde el extremo opuesto al ascensor y el cable comienza a oscilar. Es claro que las oscilaciones son pequeñas y se amortiguan debido al roce que existe en todas sus componentes.

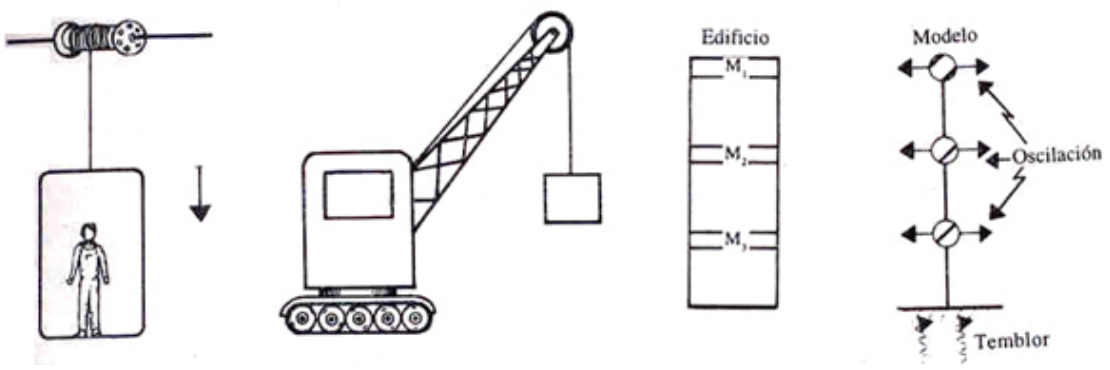


Figura IX.6: Algunas estructuras que, al ser modeladas a través de un oscilador armónico, proporcionan información relevante acerca del sistema.

• De la misma forma que un resorte oscila con una frecuencia bien determinada, el sistema de tres partículas de la Figura tiene tres formas naturales de oscilación, cada una asociada con una frecuencia ω diferente.

Un edificio puede ser modelado por este conjunto de masas unidas a una barra común. Las masas, que representan la loza del edificio, experimentan una oscilación transversal como se indica en la Figura.

Existen modelos mucho más sofisticados para representar un edificio, pero éste permite estimar, en orden de magnitud, sus frecuencias propias de oscilación.

Es importante conocer los valores de estas frecuencias puesto que el edificio debe diseñarse de modo que los valores de su frecuencia de oscilación (las frecuencias naturales mencionadas anteriormente), sean diferentes de las frecuencias características observadas en los terremotos ocurridos en la región, con el fin de evitar que comience a oscilar en simpatía con las oscilaciones de la Tierra, aumentando de esta forma su amplitud y terminando por destruirlo.

• Si debemos remolcar un auto averiado, al comienzo se debe actuar lentamente, en caso contrario, si hay movimientos bruscos se corre el peligro de alcanzar la tensión límite de la cuerda que los une.

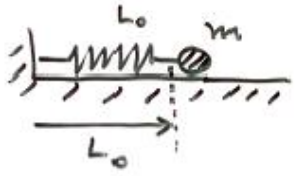
Esto se debe a que al aplicar una determinada fuerza en forma repentina, la cuerda se estira dos veces más que al realizar la misma operación *en forma lenta*. De esta última forma se evita sobrepasar el límite elástico de la cuerda.

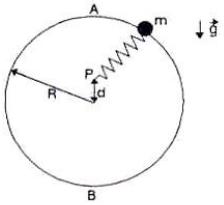
Este resultado lo usan quienes, después de amarrar un paquete, cortan la cuerda dándole un tirón violento. Desde nuestro punto de vista, lo que hacen es aplicar toda su fuerza repentinamente y, además suman toda la energía cinética acumulada con la velocidad de la mano, para gastarla en trabajo y estirar suficientemente el hilo hasta cortarlo.

En el último párrafo usamos los términos: Energía Cinética y Trabajo. En la siguiente sección explicamos el significado físico de estos dos conceptos.

IX.6. EJERCICIOS

1.– Calcule cuánto tarda la masa **m** en completar un ciclo, si permanece unida firmemente a un resorte que tiene una rigidez k_1 para la compresión y una rigidez $k_2 < k_1$ para la elongación.



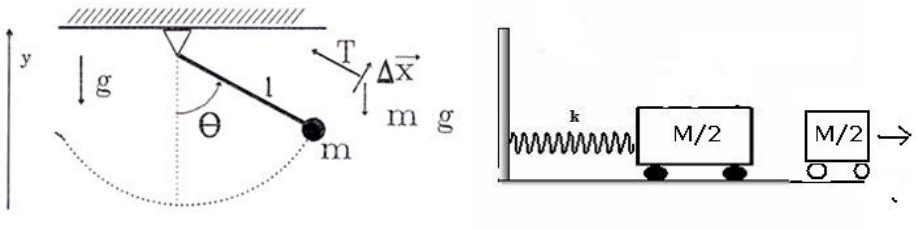


2.– Una partícula de masa m que se desliza sin roce sobre un anillo de radio R, se libera en el punto A. El anillo está unido a un resorte de constante k, cuyo otro extremo está fijo al punto P, a una distancia d del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con los otros largos. Si la partícula parte desde A, con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto B no ejerce ninguna fuerza sobre el aro. Calcule el valor de la distancia d. ¿Puede alcanzar d un valor nulo o negativo? Explique.

3.– a.- Encuentre las ecuaciones de movimiento de un péndulo matemático. Suponga que se desvía de la vertical un ángulo θ arbitrario, pero menor de 90^o; que la masa **m** está unida al extremo de un hilo de masa despreciable, inextensible y de largo **L**.

b.- Resuelva las ecuaciones anteriores para el caso en que $\theta << 1$ (medido en radianes). Compare este resultado con el obtenido para el oscilador armónico.

4.– Se tiene una masa **M** unida a un resorte de constante de rigidez **k** y largo natural $\mathbf{L}_o$. Inicialmente el resorte se comprime una distancia Δ a partir del largo natural y se suelta.



a.- Encuentre la ecuación de movimiento de este oscilador: su amplitud **A**, su período **T** y su fase ϕ. (Ojo: se refiere al oscilador con masa **M** en el extremo).

b.- Si posteriormente, al llegar al punto de equilibrio, la mitad de la masa **M** se desprende suavemente (sin perturbar o ejercer una fuerza sobre la masa que queda unida al resorte) y continúa desplazándose con su misma velocidad inicial -la que tenía al momento del despegue-, sobre el piso sin roce.

i.- Explique en una línea por qué la masa que queda fija al resorte no alcanza a la que se desprendió. En otras dos líneas adicionales, explique si la situación anterior se repetiría si existiese roce entre la masa y el piso. En este último caso: ¿Es relevante considerar el valor relativo de la masa que se desprende comparada con aquella que permanece fija al resorte?

ii.- Calcule la nueva amplitud de este sistema que mantiene una masa **M/2** en su extremo.

iii.- Igualmente calcule el nuevo período de este oscilador. con masa **M/2**.

5.– En el sistema de la Figura, la masa m_1 está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural L_o y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa m_1 existe un coeficiente de roce dinámico μ.

Si en t=0 el resorte tiene su largo natural y la masa m_2 tiene una velocidad V_o, determine la velocidad de la masa m_2 en el instante en que ha descendido una altura h con respecto a su posición inicial.

6.– Derive las ecuaciones de movimiento y encuentre los períodos de oscilación para los dos sistemas que aparecen en la Figura. m se mueve en la línea recta, en un plano horizontal sin roce y bajo la influencia de los dos resortes de rigidez k_1 y k_2 respectivamente.

7.– Considere dos masas $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}$, y $\mathbf{m}_2 = \mathbf{2\,m}$, situadas sobre una mesa con roce despreciable. Entre ambas masas se ubica un resorte de constante **k** y largo natural ℓ_o (Ver Figura).

a.- Si este resorte se comprime lentamente hasta una distancia **d**, manteniendo la masa $\mathbf{m}_2$ pegada a la pared y en ese instante el sistema se deja libre y en reposo instanténeo: Encuentre la distancia que recorre $\mathbf{m}_1$ antes que $\mathbf{m}_2$ comience a despegarse de la pared.

b.- En el instante del despegue de la masa de la pared:¿Cuál es el valor de la tensión en el resorte?

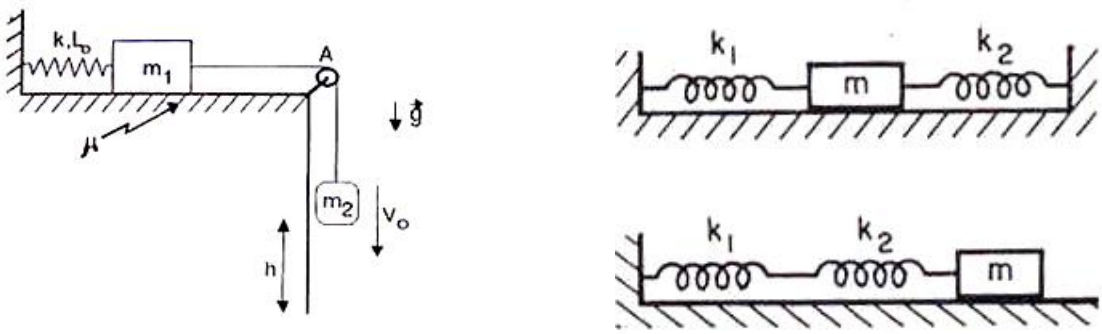


Figura IX.7: **Problema # 11** **Problema # 12**

c.- ¿Cuánto tiempo tarda en que esto suceda?

d.- Si se invierte la posición de las masas: ¿Cuánto tiempo tarda $\mathbf{m}_1$ en despegarse de la pared? ¿Es el mismo tiempo que aquel del caso anterior?

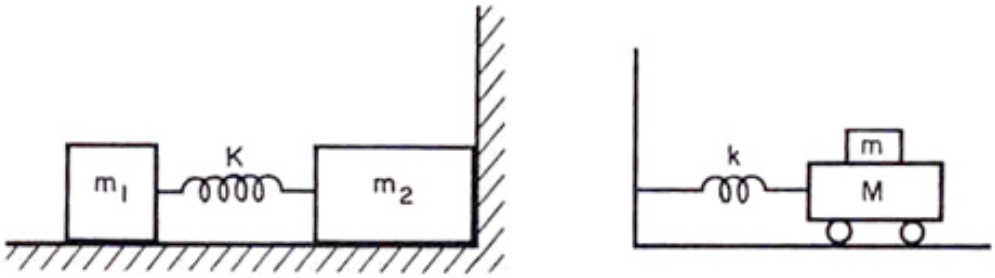


Figura IX.8: **Problema # 14** **Problema # 15**

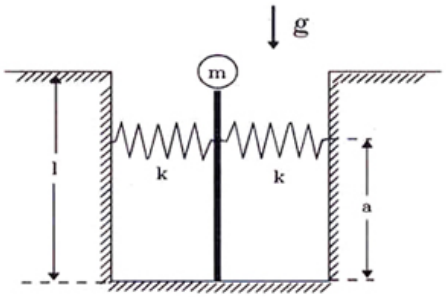
8.– Considere un bloque de masa M colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de constante k y largo natural L_o. Sobre el bloque se coloca una partícula de masa m. Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia d con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa m una vez que se libera el resorte.

9.– Dado el oscilador mecánico mostrado en la Figura. Encontrar la amplitud máxima de oscilación para que la masa superior no resbale sobre M. El coeficiente de fricción estática entre las dos masas es μ.

10.– En el sistema de la Figura, la masa m realiza *pequeñas oscilaciones* alrededor de la posición de equilibrio –la línea vertical–, con una velocidad angular ω.

a) Encuentre el valor de la frecuencia de oscilación ω, sin considerar la aceleración de gravedad.

b) Considere ahora el efecto de la aceleración de gravedad g, debido a las pequeñas variaciones que se producen en la altura de la masa m durante la oscilación.



Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[3] Retrato de Hooke: www.newscientist.com/blogs/shortsharpscience/2012/01/hooke-springs-to-life-in-new-p.html

[4] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañá editora Continental, S. A DE C., México, Primera reimpresión, 1996.

Capítulo X

TRABAJO Y ENERGÍA

X.1. INTRODUCCIÓN

El concepto de energía es abstracto. También es múltiple, existe energía gravitacional, eléctrica, nuclear... El calor es también una forma de energía. La más cercana a nosotros es la energía cinética, aquella asociada al movimiento de una partícula, es proporcional al cuadrado de la velocidad y se ubica en la partícula por tanto es más concreta.

Una fuerza representa la interacción entre dos cuerpos, ya sea uno distante (acción a distancia) o por contacto. Cuando hacemos el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo (DCL), reemplazamos cada cuerpo externo por una fuerza bien definida. Si usamos la segunda ley de Newton y sumamos todas las fuerzas externas (interacciones), podemos describir el movimiento de este objeto.

Este protocolo es una representación estática: dibujamos las fuerzas como si todo estuviera en reposo. Sin embargo está en movimiento y ese movimiento lo producen las fuerzas que representan el medio que rodea al cuerpo y que identificamos en el DCL.

A continuación consideramos la segunda ley de Newton en este contexto.

Si la fuerza produce un desplazamiento, podemos multiplicar (adecuadamente) la fuerza por el desplazamiento y denominar este producto de vectores como el trabajo. Este trabajo representa la transferencia de aquello que llamamos energía desde el medio al cuerpo. El agente es en este caso, la fuerza.

En el otro lado de la ecuación asociada a la segunda ley de Newton, aparece la aceleración, que al multiplicarla por el desplazamiento, adquiere dimensiones de velocidad al cuadrado ($\{[L]/[T^2]\}[L] = [L^2][T^2]$). Esta es la energía cinética que adquiere el cuerpo.

DEFINICIÓN DE TRABAJO

De acuerdo a esta imagen debemos sumar el producto de la fuerza con su respectivo desplazamiento, punto a punto a lo largo de la trayectoria. Esto nos dará el trabajo realizado sobre el cuerpo durante dicha trayectoria.

La definición del trabajo realizado por una fuerza es el **producto escalar** entre el vector desplazamiento infinitesimal de un punto y la fuerza que actúa sobre dicho punto. Sus dimensiones son las mismas de la energía.

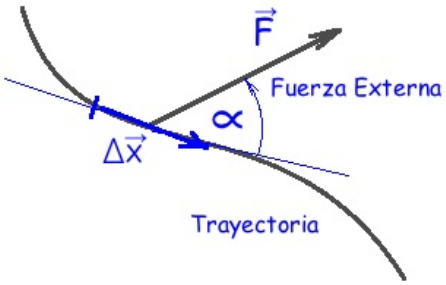
La suma del producto de estos pequeños desplazamientos por su respectiva fuerza a lo largo de la trayectoria, nos da el trabajo realizado por las fuerzas consideradas entre el punto de partida y el final.

$$W\,|_{x}^{x+\Delta x} \equiv \underset{\text{Trabajo}}{\Delta W} = \underset{\text{Fuerza}}{\vec{F}(x)} \cdot \underset{\text{Desplazamiento}}{\Delta\vec{x}} = |\vec{F}(x)||\Delta\vec{x}|\,\cos\Phi.$$

Unidad: [W] = newton $\times$ m $\equiv$ **Joule**.

La notación en Δ**W** indica el trabajo para ir de $\vec{x}$ a $(\vec{x}+\Delta\,\vec{x})$.

El esfuerzo requerido para arrastrar un objeto -lentamente-, sobre una superficie rugosa nos da una idea intuitiva de lo que es el trabajo **W**.



El cálculo de esta expresión es el primer paso antes de obtener la expresión final de la energía. El siguiente consiste en calcular el producto de la aceleración local por el desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria.

Como la ley de Newton establece $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\,\tilde{\mathbf{a}}$, si multiplico la fuerza por el desplazamiento, para mantener la igualdad lo mismo debo sobre el término de la derecha y así obtendremos una igualdad a partir de la segunda ley de Newton. Si realizamos la suma a lo largo de la trayectoria tendremos el trabajo a la izquierda de la ecuación y la energía cinética (por definición) a mano derecha. Veremos esto más adelante.

A continuación usaremos la definición de trabajo en un par de casos de interés para ilustrar cómo funciona.

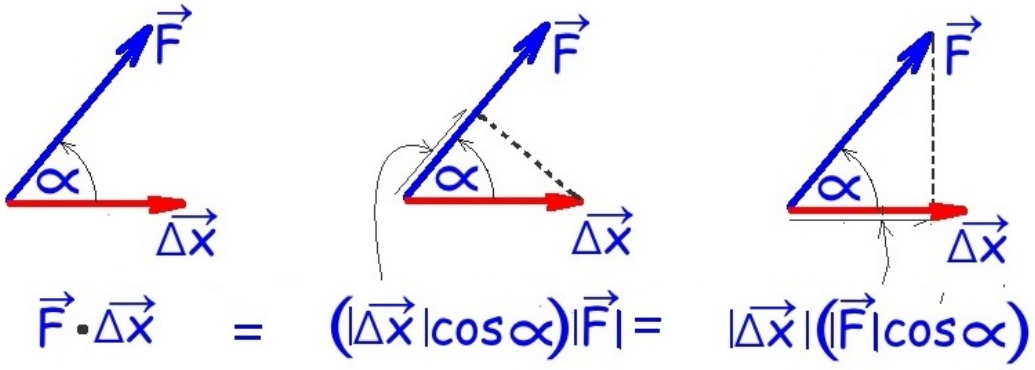


Figura X.1: *Como el producto escalar es una proyección de un vector sobre y una multiplicación de sus magnitudes, es indiferente cuál vector se proyecta sobre cuál. Uno elige la modalidad que es más fácil y directa de interpretar físicamente.*

X.2. TRABAJO Y FUERZAS CONSTANTES

Obtendremos la expresión para el trabajo realizado por una fuerza constante actuando sobre un objeto que se traslada entre los puntos espaciales **A** y **B**.

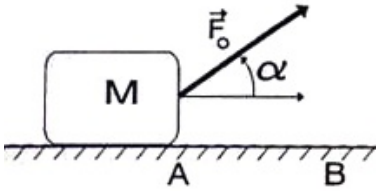
El esfuerzo para arrastrar un objeto entre dos puntos distantes depende de las fuerzas que actúan sobre el objeto. En general, existen varias fuerzas actuando sobre el mismo objeto simultáneamente. Cuando calculamos el trabajo debemos entonces referirnos a la fuerza que estamos considerando, y en ese caso, el trabajo es el realizado por una de ellas o por un par de ellas o todas. Así, el trabajo tiene un nombre asociado a la fuerza que lo genera. Este es la parte local del trabajo, lo que ocurre en un punto cualquiera: $\Delta\,\mathbf{W}$. El otro elemento que interviene es la trayectoria. Lo que señalamos con el subíndice**A** y el superíndice**B** : Sumar este efecto local a lo largo del trayecto. Eso nos da el trabajo de dicha fuerza (o fuerzas) para trasladar un objeto.

Con respecto a la trayectoria, ocurre algo interesante: en casos de interés, el trabajo total NO depende de la trayectoria seguida, sólo de los puntos final e inicial, desde donde salió y hasta donde llegó. Como no depende del trayecto, esto debe ser consecuencia de propiedades de las fuerzas que participan en estos casos. para distinguirlas de aquellas en que esto no ocurre -como es el caso de la fuerza del roce-, se denominan fuerzas conservativas. Veremos unos ejemplos de estos casos en las secciones posteriores.

Ejemplo

Encontrar el trabajo realizado para trasladar un bloque desde **A** hasta **B**, aplicando una fuerza constante F_0, en la forma como se indica en la Figura.
El trabajo realizado para trasladar el objeto hasta **B** es por definición:

$$W|_A^B = \vec{F}_0 \cdot \Delta\vec{x} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A).$$



Trabajo realizado por una fuerza externa sobre un bloque arrastrado sobre un piso sin roce.

$W|_A^B$ es el trabajo realizado por el agente que aplica la fuerza $\vec{F}_0$ sobre el objeto. Recordemos que $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\ \alpha$:

$$W|_A^B = |\vec{F}_0| \cdot |(\vec{x}_B - \vec{x}_A)| \cdot \cos\alpha\ =\ |\vec{F}_o|\ d\ \cos\alpha.$$

donde **d** es la longitud del camino recorrido. □

Ejemplo

Considere un bloque que desliza sobre un plano inclinado arrastrado por una cuerda que actúa a través de una polea. El plano tiene roce despreciable.

a.- Calcule el trabajo realizado por la persona si el bloque desliza una distancia **L** sobre el piso. ¿Cuál debe ser el mínimo valor de esta fuerza para que pueda subir el bloque?

b.- Calcule el trabajo de la fuerza de gravedad en el caso anterior.

c.- Considere el efecto del roce. Suponga que la persona usa el mínimo de fuerza para deslizar el bloque: apenas un poco más de lo necesario para mantener el equilibrio. En este caso calcule el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque.

Solución

a.- Del DCL, obtenemos que la masa asciende sólo si $\mathbf{T} > \mathbf{Mg}\,\mathrm{sen}\,\theta$. Supongamos que esta condición se cumple. Si nos piden el trabajo realizado por la persona que tira la cuerda con una fuerza **T**, esto es directo

$$W^T_{dist-L}\ =\ T\,L.$$

Si **T** es menor que $\mathbf{Mg}\,\mathrm{sen}\,\theta$, no puede levantar la masa y ésta comienza a deslizar hacia el vértice. El trabajo de la fuerza **T** en ese caso será negativo: el desplazamiento apunta en la dirección opuesta a la fuerza ejercida. El ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es de 180^o. Podríamos usar ese trabajo para elevar una masa adecuada instalada en el extremo de la cuerda.

b.- En el caso de la fuerza de gravedad, de acuerdo a la definición de trabajo, tenemos

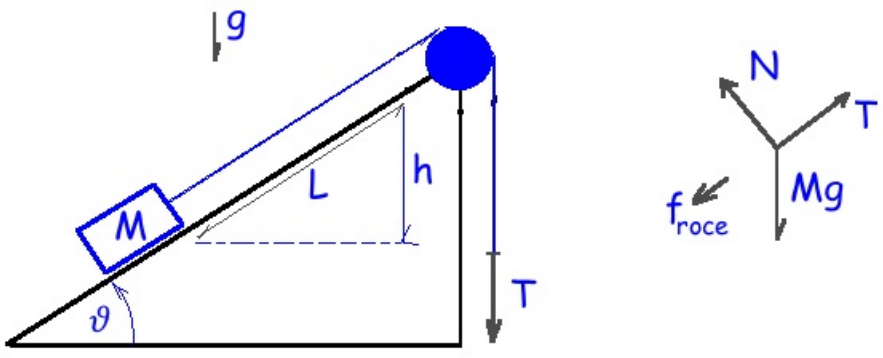


Figura X.2: *Calcularemos el trabajo que realiza la fuerza* **T** *al desplazar el bloque* **M** *una distancia* **L**. *Incluiremos el trabajo de la fuerza gravitacional* **Mg** *y finalmente el roce, que no apareció en los dos casos anteriores. Mostraremos que el trabajo de la fuerza de gravedad depende sólo de la altura* **h**.

$$W^{Mg}_{dist-L} = \sum_{j=0}^{j=N} |Mg|\,|\Delta\, x_j|\,\cos(90^o + \theta) = |Mg|\,|L|(-\operatorname{sen}\theta) = -Mg\,h.$$

Usamos acá que $\sum_{j=0}^{j=N} \Delta\, x_j = L$. Como las otras cantidades son constantes salen fuera de la sumatoria.

El trabajo es negativo y proporcional a la altura. El sentido común indica que debe ser así. Para levantar una masa se necesita efectuar un trabajo. Y ese trabajo debe depender de la altura a la cual uno desea levantar un objeto.

Podemos conectar este resultado con lo propuesto en la Figura X.1: como la fuerza es constante, proyectamos el desplazamiento **L** sobre la dirección de la fuerza y obtenemos la altura **h** alcanzada. Veremos que este es un resultado general para las fuerzas constantes.

c.- Debemos calcular el trabajo de la fuerza neta sobre la masa **M**. De acuerdo al DCL, las fuerzas normales al plano inclinado no realizan trabajo puesto que son perpendiculares al desplazamiento. Esto es independiente al hecho que ambos se cancelan: $N - M\,g\,\cos\theta = 0$.

Lo relevante es que son perpendiculares al desplazamiento.

De modo que en la suma de las fuerzas actuando sobre cuerpo, éstas no figuran.

Con respecto a las fuerzas alineadas a lo largo del desplazamiento, el trabajo de todas las fuerzas es

$$W^{neta}_{dist-L} = W^{f-roce}_{dist-L} + W^{\text{gravitación}}_{dist-L} + W^{\text{Tensión}}_{dist-L} \tag{X.1}$$

$$W^{neta}_{dist-L} = \sum_{j=0}^{j=N} \left([- f_{roce} + M\, g\, \cos(90^o + \theta) + T]\, \Delta\, x_j \right). \tag{X.2}$$

Como hemos supuesto que el agente externo utiliza el mínimo de fuerza, el sistema, a orden cero, está en equilibrio, hay solo un pequeño exceso en la fuerza impulsora **T** que mueve, muy lentamente, la masa **M** sobre el plano. Podemos suponer que el sistema está en equilibrio.

$$\mathbf{T} - M\, g\, \operatorname{sen}\theta - \mu_{cin}\, M\, g\, \cos\theta = 0. \tag{X.3}$$

Con esta ecuación de equilibrio, se obtiene que

$$W^{f-roce}_{dist-L} = \sum_{j=0}^{j=N} \left(- f_{roce}\, \Delta\, x_j \right) = - \mu_{cin}\, M\, g\, \cos\theta\, L \tag{X.4}$$

$$W^{neta}_{dist-L} = 0, \quad \text{de esta forma} \tag{X.5}$$

$$W^{f-roce}_{dist-L} = - W^{\text{gravitación}}_{dist-L} - W^{\text{Tensión}}_{dist-L}. \tag{X.6}$$

□

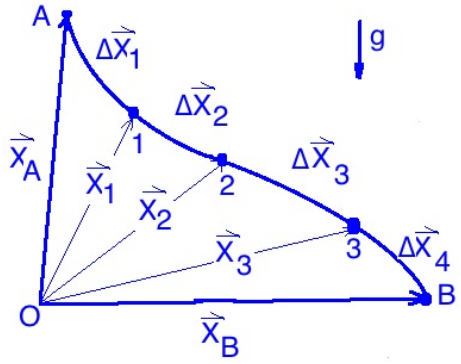


Figura X.3: *El trabajo realizado en el trayecto de* **A** *hasta* **B** *por una fuerza constante resulta igual a la proyección del trayecto sobre la línea definida por la dirección de la fuerza constante. En el caso de la atracción gravitacional: $m\vec{g}$, esta línea es la vertical. Para cuantificar el trabajo sin recurrir al cálculo infinitesimal, rectificamos el trayecto transformando los arcos de la curva en cuerdas. Los trayectos , por ejemplo $\Delta\,\vec{x}_3$, corresponden a unir el punto $\vec{x}_2$ con el punto $\vec{x}_3$ mediante una cuerda.*

El siguiente ejemplo se refiere a una máquina. Una máquina es un artefacto que en esencia realiza un trabajo específico. Un ejemplo es la palanca, el agente externo disminuye la fuerza aplicada pero debe aumentar el desplazamiento donde se aplica. En el punto donde actúa, el desplazamiento es pequeño pero multiplicada por una fuerza de mayor magnitud.

Otro ejemplo es la caja de cambios en un auto. Al partir debe vencer la inercia, utiliza la primera marcha en la cual el motor da muchas vueltas y avanza más lentamente.

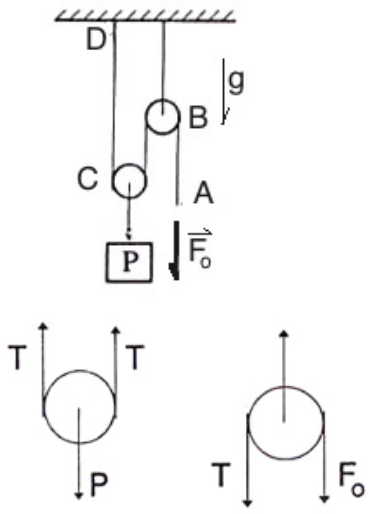
Ejemplo

En el sistema de poleas de la Figura, calcule el trabajo realizado al desplazar el extremo **A** una distancia ℓ. El peso de la polea **C** es **P**, y no existe roce entre ninguno de los elementos del sistema.

En este mecanismo existe una *conservación del trabajo* que nos conducirá al descubrimiento de la conservación de la energía más adelante. La energía tiene las mismas dimensiones que el trabajo y puede adquirir distintas formas, como energía cinética (asociada al movimiento), energía potencial (asociada a la posición), calor y otras.

Estudiemos la estática del sistema de poleas más simple: incluye sólo dos de ellas.

En esta configuración no existe roce en las poleas. La polea **B** está fija al techo, mientras que **C** puede subir o bajar.
Analicemos el equilibrio de este sistema haciendo los diagramas de cuerpo libre relevantes:



$$2\,T = P, \qquad T = \frac{1}{2}\,P$$

$$F_0 = T = \tfrac{1}{2}\,P$$

$$F_0 = \frac{1}{2}\,P \qquad \text{(X.7)}$$

En resumen, para soportar el peso P *sólo se necesita aplicar una fuerza* $F_0 = P/2$. Para disminuir aún más la fuerza, basta multiplicar el número de vueltas de la cuerda sobre las poleas. La regla para encontrar el valor de la fuerza requerida en este caso es:

$$F_0 = \frac{P}{n},$$

donde n es el número de cuerdas que resisten el peso, sin contar la cuerda donde F_0 actúa directamente. El caso estudiado corresponde a n=2. En resumen, un niño puede levantar un peso tan

grande como quiera, usando el número adecuado de poleas, o el número correcto de vueltas de la cuerda sobre un par de poleas.

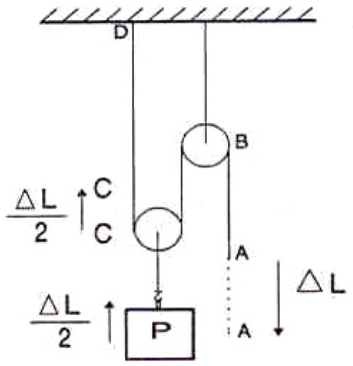
Estudiemos este mismo problema desde el punto de vista del trabajo. Volvamos al sistema más simple de poleas. Si están en equilibrio, un pequeño empujón desplazará el punto A hacia abajo (por elegir una dirección).

$$W_A = F_0 \cdot \Delta x_A = \tfrac{1}{2} F_o \, \Delta x_A \qquad \text{(Trabajo efectuado en A)}$$

$$W_C = P \cdot \Delta x_C = \; ? \qquad \text{(Trabajo efectuado en C)}$$

¿Cómo se relaciona $\Delta\, x_C$ con $\Delta\, x_A$?

Se puede ver que si A baja una distancia $\Delta\ell$, C sube $(\Delta\ell/2)$, puesto que C se ubica justo en el punto medio de cada una de sus ramas $\overline{CD}$ y $\overline{CB}$ y el largo de la cuerda $\widehat{BCD}$ se ha acortado en $\Delta\ell$.



$$W_C = P\,\frac{1}{2}\,\Delta x_A = W_A \;\Rightarrow\; W_C = W_A \qquad \text{(X.8)}$$

El trabajo efectuado sobre el punto A y aquél sobre el punto C, es el *mismo*. Como el desplazamiento en A es el doble, la fuerza necesaria es la mitad del peso P.

Este es un fenómeno similar a la multiplicación de fuerzas que se verifica con las *palancas*. Estudiaremos este caso al introducir el torque, más adelante.

X.2.1. Trabajo Realizado por un Resorte

En el caso de un resorte la fuerza no es constante, depende de la compresión o alargue que experimente. Mostraremos que es posible resolver este problema con herramientas matemáticas ya conocidas.

Ejemplo

¿ Cuál es el trabajo necesario para alargar un resorte? Suponga que el resorte descansa sobre una mesa sin roce, de manera que sólo actúa su fuerza de restitución.

La ley de fuerza es **F(x) = - k x,** donde **x** indica la variación de la longitud del resorte medida a partir de su largo natural.

Suponemos que al alargar el resorte lo hacemos en la misma dirección de su longitud y por lo tanto el problema es unidimensional y no necesitamos usar explícitamente vectores.

Lo novedoso en este problema radica en la dependencia de la fuerza en la posición y, por lo tanto, para calcular el trabajo es necesario sumar pequeños desplazamientos y en cada uno de ellos usar un valor *constante* de la fuerza, que represente su valor promedio en dicho intervalo.

De esta forma, el trabajo necesario para dar un pequeño desplazamiento al resorte es:

$$\begin{aligned} \Delta W \quad &= F(x)\,\Delta x, \\ &\uparrow \\ F(x) &= +k\,x. \end{aligned}$$

El signo $(+)$ de la segunda línea de la última ecuación, se debe a que estamos calculando el trabajo que realiza el *agente externo*, que estira el resorte y que a cada instante debe aplicar una fuerza *contraria* a la fuerza con que el resorte se resiste a ser alargado.

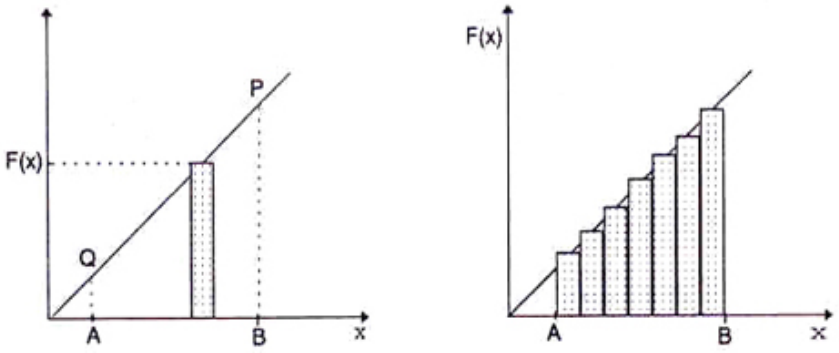


Figura X.4: *El trabajo realizado es igual al área encerrada bajo la curva de F(x) por $\Delta\,x$ alrededor del punto x. El valor medio de F(x) asociado a cada uno de los intervalos $\Delta\,x$ lo representamos, en este caso, por el valor de F(x) evaluado en el punto medio del intervalo.*

Si estiramos *(lentamente)* el resorte desde A hasta B el trabajo total será:

$$\begin{aligned} \Delta\,W\,|_A^B \quad &= \quad \textstyle\sum_{x_A}^{x_B} \Delta\,x_i\,F(x_i) = \text{Area bajo el trapecio ABPQ}, \\ &= \qquad (AB)\cdot\{k\,x_A + \frac{1}{2}\,k(x_B - x_A)\}, \\ &\qquad\quad \downarrow \qquad \downarrow \\ \Delta W|_A^B \quad &= \quad (x_B - x_A)\cdot\frac{k}{2}\,(x_A + x_B) = \frac{1}{2}\,kx_B^2 - \frac{1}{2}\,kx_A^2. \end{aligned}$$

$$\Delta W|_A^B = \frac{1}{2}\,k(x_B^2 - x_A^2). \tag{X.9}$$

Este resultado se puede obtener sumando cada uno de los trapecios desde A hasta B. Es un proceso más largo, sin embargo es de utilidad porque es una forma de enfrentar los casos donde la función $f(x)$ no es una línea recta.

Sumemos cada uno de estos términos:

$$W|_A^B = \sum_A^B \, (k\, x_i) \cdot \Delta\, x_i = k \sum_{n=1}^{N} [x_A + \left(n - \frac{1}{2}\right)\, \Delta]\, \Delta,$$

donde el significado de cada uno de los signos se detalla a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta x_n &\equiv x_{n+1} - x_n = \Delta, \qquad \text{constante}, \\ x_n &= x_A + (n - \tfrac{1}{2})\, \Delta, \\ x_{n+1} &= x_A + (n + 1 - \tfrac{1}{2})\, \Delta. \end{aligned}$$

en el gráfico, $k\, x_i$ representa la altura del rectángulo cuya base es Δ. De paso mencionamos que conviene usar el valor $x_n = x_A + \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta$ para la altura, puesto que de esta forma el resultado obtenido para el área será el valor exacto, sin aproximaciones.

$$\begin{aligned} W|_A^B &= k\, [\textstyle\sum_{n=1}^{N}\, x_A\,]\Delta + \Delta^2\, [\sum_{n=1}^{N}\, n] - \Delta^2 [\sum_{n=1}^{N}\, (\tfrac{1}{2})], \\ &= k\, \left\{ N\, \Delta\, x_A\, + \Delta^2\, (N+1) \frac{N}{2} - \Delta^2\, \frac{N}{2} \right\}, \end{aligned}$$

pero $\Delta \cdot N \equiv [x_B - x_A]$, y tomando el límite $\Delta \to 0$ simultáneamente con $N \to \infty$, de forma que el producto de ambas cantidades permanezca constante e igual al valor ya indicado, se tiene:

$$W|_A^B \equiv W_A^B = k\, \{x_A(x_B - x_A) + \frac{1}{2}\, (x_B - x_A)^2 + 0 - 0\}.$$

$$W|_A^B = k\, x_A\, (x_B - x_A) + \frac{k}{2}\, (x_B^2 - 2\, x_B + x_A^2),$$

y finalmente reobtenemos el mismo valor de la ecuación [X.9],

$$W_A^B = \frac{1}{2}\, k\, (x_B^2 - x_A^2). \tag{X.10}$$

Esta expresión representa el trabajo realizado para estirar lentamente un resorte desde x_A hasta x_B. El trabajo puede ser positivo (el agente externo debe realizar el trabajo) o negativo (si el resorte arrastra lentamente al agente externo). El signo depende del valor relativo de x_A y x_B.

X.3. ENERGIA

Estirar un resorte lentamente *no* es, sin duda, un proceso natural. Es sólo un truco que nos ha servido para tratar un problema por partes, comenzando por la más simple. Veamos ahora que sucede si estiramos un resorte y luego lo soltamos, de modo que el sistema oscile libremente. En este caso, la segunda ley de Newton $F = m\,a$ debe cumplirse en cada instante y, *suponemos*, que la expresión $F = -k\,x$, sigue siendo válida aun cuando fue descubierta al estirar el resorte *lentamente*. Si los resultados teóricos obtenidos con esta suposición coinciden con lo que se observa al realizar el experimento bajo estas otras condiciones, ésta aproximación es considerada aceptable. Dentro del error experimental, las observaciones *coinciden* con los resultados teóricos obtenidos a partir de esta suposición.

De esta forma, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\begin{aligned} m\,a &= -k\,x \\ m\frac{\Delta v}{\Delta t} &= -k\,x. \end{aligned}$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración de la masa en cada punto de la trayectoria depende de la coordenada x de dicho punto, $a = a(x)$.

Para resolver este problema, continuamos con el mismo procedimiento empleado al calcular el trabajo necesario para estirar un resorte *lentamente*. Multiplicamos ambos lados de la última ecuación por el desplazamiento $\Delta\,x$ que ocurre en el punto x y sumamos esta expresión a lo largo de la trayectoria. Escribimos la aceleración como $a \equiv \Delta\,v/\Delta t$.

La suma se lleva a cabo entre dos puntos arbitrarios de la trayectoria: x_B y x_A:

$$m\sum_{x_B}^{x_A}\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\Delta x = (-1)\,k\,\left(\sum_{x_B}^{x_A} x\cdot\Delta x\right), \tag{X.11}$$

como todo estos intervalos $\Delta t, \Delta x$, son muy pequeños pero finitos, podemos intercambiar el orden,

$$m\cdot\left[\sum_{x_B}^{x_A}\Delta v\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\right] = -k\sum_{x_B}^{x_A} x\cdot\Delta\,x,$$

usando $v = \frac{\Delta\,x}{\Delta\,t}$, y asociándolo con la velocidad en el punto medio del intervalo v_n y v_{n-1},

$$m\cdot\left[\sum_{x_B}^{x_A}\Delta\,v\cdot v\right] = -k\sum_{x_B}^{x_A} x\cdot\Delta\,x.$$

Los resultados de esta sumatoria no pueden depender del nombre asignado a las variables. Por lo tanto, la sumatoria de los términos $v\cdot\Delta v$, debe dar el mismo resultado que el obtenido en la sumatoria [X.9], donde aparece $x\cdot\Delta x$. En ambos casos se calcula el área bajo una línea recta (ver Figura).

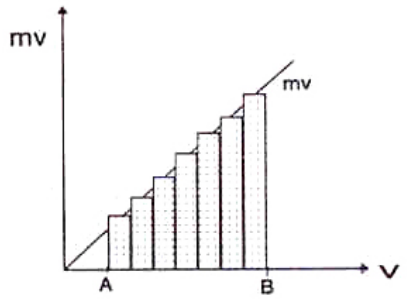


Figura X.5: *En este caso, $m \cdot v$, corresponde al eje vertical (ordenada) y la velocidad v, cuyos valores se marcan en el eje horizontal (abcisa). El área bajo la recta es claramente el área del trapecio sombreado de la Figura.*

La operación donde se reemplazó la aceleración por $\Delta v/\Delta t$, tenía precisamente este objetivo: transformar una sumatoria cuyo valor no conocíamos, en otra que nos era familiar. El resultado es:

$$\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot v = \frac{1}{2}(v_A^2 - v_B^2). \tag{X.12}$$

Reemplazando a la izquierda de la igualdad esta última expresión y a la derecha de la igualdad el resultado de la ecuación [X.9], tenemos:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 = -\frac{1}{2}\, k\, x_A^2 + \frac{1}{2}\, k\, x_B^2.$$

Agrupando los términos con el mismo subíndice a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 + \frac{1}{2}\, k\, x_A^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + \frac{1}{2}\, k\, x_B^2 \tag{X.13}$$

A la izquierda de la ecuación tenemos una cantidad evaluada en el punto x_A, y a la derecha, tenemos *la misma expresión* pero ahora evaluada en el punto B. El signo igual nos señala que la suma de los dos términos ubicados a la izquierda de la igualdad tienen el mismo valor, donde quiera que esta suma se evalúe, puesto que el punto A y el punto B son arbitrarios.

La expresión que se repite en ambos lados de la igualdad se denomina ENERGIA. Al evaluar esta expresión en cualquier punto de la trayectoria se obtiene el mismo número: es una cantidad conservada, no cambia su valor:

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2, \tag{X.14}$$

El primer término se denomina energía cinética y el segundo, energía potencial del resorte. La suma de ambos permanece constante durante el movimiento.

Existe entonces una componente de la energía proveniente del movimiento, la energía cinética y una energía debida al estiramiento del resorte, la energía potencial.

Ambas pueden ser transformadas en trabajo. Por ejemplo, al martillar un clavo estamos transformando la energía cinética del martillo en el trabajo que se requiere para hundir el clavo en la madera. De igual forma, se puede comprimir un resorte para que al liberarlo imprima una cierta velocidad a una masa. Eventualmente esta energía puede transformarse en trabajo en la forma indicada.

Si son equivalentes entonces la *Energía* debe tener las dimensiones de *Trabajo*, es decir:

$$\text{[Energía]} \quad \equiv \quad [fuerza] \times [distancia] \quad \equiv \quad [\text{newton} - m].$$

Con la letra **T** $\equiv m\,v^2/2$ designamos a la energía cinética y la letra **V(x)** $\equiv \dfrac{1}{2}\,k\,x^2$ señala la energía potencial. La conservación de la energía se escribe como:

$$E = T + V.$$

X.3.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico

En muchos modelos físicos se supone que el potencial depende exclusivamente de las coordenadas espaciales. Si este es el caso, entonces podemos graficar el potencial en función de estas coordenadas y de esta forma, obtener directamente algunas propiedades del movimiento sin necesidad de resolver las ecuaciones.

Para un oscilador armónico, la ecuación de la energía es:

$$E_0 \;=\; \frac{1}{2}\,kx^2 \;+\; \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

$$E_0 \;=\; V(x) \;+\; T, \qquad \text{donde:}$$

V $\equiv$ Energía Potencial,
T $\equiv$ Energía Cinética.

Como la energía E_0 es constante, la diferencia $[E_0 - V(x)]$ nos da el valor de T, la energía cinética del sistema. En los puntos donde T se hace cero, sabemos que el cuerpo está momentáneamente en reposo. En el caso del oscilador armónico, este punto marca el cambio de sentido en la dirección de su movimiento.

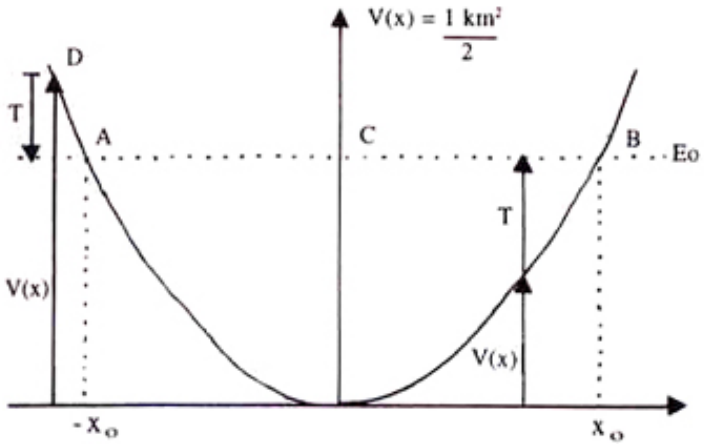


Figura X.6: *Por convención la flecha de la energía cinética siempre debe apuntar en el sentido positivo de la ordenada V(x). La energía potencial puede ser positiva o negativa.*

Donde $V(x)$ es un mínimo, T es un máximo y allí el cuerpo adquiere su máxima velocidad.

En los puntos A y B del gráfico $V(+x_0) = V(-x_0) = E_0$, la energía cinética se anula y el cuerpo permanece momentáneamente en reposo. En este caso A y B corresponden a los puntos de máxima elongación y compresión del resorte.

$$V(x_0) = V(-x_0) = E_0 \quad \Rightarrow T = 0 \begin{cases} v_A &= 0 \\ \\ v_B &= 0 \end{cases}$$

En el punto C, $V(0) = 0 \Rightarrow E_0 = T \Rightarrow v_C = v_{\mathbf{max}}$.

La partícula *no* puede alcanzar el punto D porque allí la energía cinética es negativa. Al dibujar las flechas correspondientes en ese punto, vemos que la única posibilidad de cumplir la ecuación de la energía $E = T + V$ es que T sea negativo, lo que está prohibido en este contexto, puesto que implicaría una velocidad imaginaria.

$$T < 0, \qquad T = \frac{1}{2}\, m v_D^2 < 0,$$

como $m > 0 \Rightarrow v_D^2 < 0$, lo que constituye una contradicción puesto que la velocidad en cada punto debe ser un número real.

X.4. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE

Estudiaremos el efecto de las fuerzas de roce sobre el movimiento de la partícula.

Incluyendo la fuerza de roce en la ecuación [X.11], se tiene:

$$m \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta x = (-1)\, k \left(\sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} x \cdot \Delta x \right) - \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} f_{\text{roce}} \cdot \Delta x, \qquad \text{(X.15)}$$

realizando la suma de la misma forma que se hizo anteriormente y definiendo:

$$W_{\text{i}}^{\text{f}} \equiv \sum_{x_{\text{i}}}^{x_{\text{f}}} f_{\text{roce}} \cdot \Delta x, \quad \text{se tiene:}$$

$$T_{\text{f}} - T_{\text{i}} = -[V_{\text{f}} - V_{\text{i}}] - W_{\text{i}}^{\text{f}}, \qquad \text{y ordenando los términos:}$$

$$W_{\text{i}}^{\text{f}} = E_{\text{i}} - E_{\text{f}}. \qquad \text{(X.16)}$$

La energía *no* es una constante de movimiento bajo estas circunstancias. La diferencia en el valor de la energía inicial y final es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce. Este trabajo se transforma en calor y no es posible reincorporarlo a los cuerpos en la forma de energía cinética o potencial.

En estos casos, el roce permanentemente degrada la energía mecánica, transformándola en calor. Este es un proceso irreversible, el calor no se puede transformar directamente en energía mecánica. En consecuencia, la energía final –la suma de la energía cinética y potencial–, será menor que la energía total inicial.

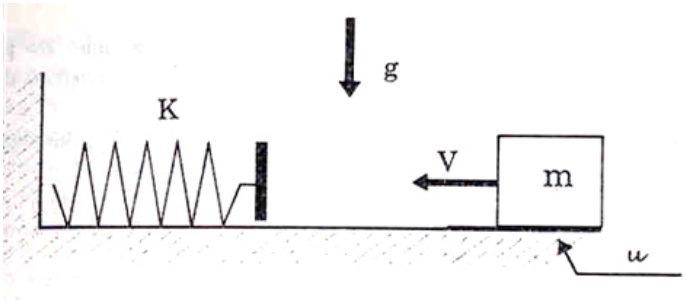


Figura X.7: *El resorte está inicialmente con su largo natural y la masa m se acerca con velocidad V. La energía no se conserva debido a la existencia de roce entre el piso y la masa. La energía disipada es igual al trabajo que realiza la fuerza de roce.*

Ejemplo

Una masa m se encuentra a una distancia D del extremo de un resorte de constante k que, por simplicidad, suponemos que tiene masa nula. La masa m se desliza por un piso horizontal cuyo coeficiente de roce cinético es μ_c y el de roce estático es μ_e.

a) Suponga que la masa m tiene una velocidad V cuando se encuentra a la distancia D del extremo del resorte. Calcule el acortamiento del resorte, suponiendo que la velocidad V es suficiente para alcanzar a comprimirlo.

b) ¿Qué valor debe tener la velocidad V para que debido a la fuerza de roce, m se detenga justo al tocar el resorte?

c) Calcule el valor de V para que la masa m se detenga justo en el momento que el resorte alcanza su máxima compresión.

a) La energía del resorte en el momento de su máxima compresión es:

$$E_{\text{compresión}} = \tfrac{1}{2}\, k\, x^2,$$

y la energía inicial de la partícula m: $E_{\text{inicial}} = \tfrac{1}{2}\, m\, V^2.$

La diferencia entre estas energías corresponde al trabajo realizado por la fuerza de roce que transforma la energía mecánica en energía calórica. Este trabajo es el siguiente:

$$\sum_A^B \left(-f_{\text{roce}} \cdot \Delta\, x\right) = E_f - E_i,$$

ordenando los términos y definiendo:

$$W_{\text{fricción}} \equiv \sum_A^B \left(f_{\text{roce}} \cdot \Delta\, x\right), \quad \text{llegamos a:}$$

$$W_{\text{fricción}} = [\mu_c\, m\, g][x + D] = E_{\text{inicial de m}} - E_{\text{compresión}}\ .$$

Si reemplazamos las expresiones correspondientes a cada una de las energías se llega a una ecuación de segundo grado para la incógnita x:

$$x^2 + \frac{2\,\mu_c\, m\, g}{k}\, x - \frac{2}{k}\,[\frac{1}{2}\, m\, V^2 - \mu_c\, m\, g\, D] = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\mu_c\, m\, g}{k}\ \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{k}{(\mu_c)^2\, m\, g^2}\ \left(V^2 - 2\,\mu_c\, g\, D\right)}\right].$$

De acuerdo a la convención de signos usada (ver Figura), x debe ser positivo para representar al resorte comprimiéndose, por lo tanto sólo el signo positivo del paréntesis cuadrado tiene sentido físico y es la respuesta buscada.

b) Si queremos usar el resultado anterior entonces debemos imponer que una de las raíces de la ecuación cuadrática en x sea nula. Esto se logra si:

$$\left(V^2 - 2\,\mu_c\,g\,D\right) = 0.$$

La explicación física de este resultado es la siguiente: toda la energía cinética de la masa m se disipó al recorrer la distancia D que la separa del extremo del resorte. Esto se puede verificar directamente escribiendo la ecuación correspondiente y comprobando que se obtiene el mismo resultado:

$$W_{\text{fricción}} \equiv [\mu_c\,m\,g]\,\cdot\,[x+D] = E_{\text{inicial de m}} \equiv \frac{1}{2}\,m\,V^2.$$

Si ponemos x=0, obtenemos V.

c) En este caso, el resorte comenzó a comprimirse desacelerando la masa m. Logró detenerla comprimiéndose una distancia tal, que la fuerza de restitución del resorte en esa posición, es menor que la fuerza de roce estático necesaria para poner en movimiento, nuevamente, a la masa m. En el caso crítico, se comprime lo suficiente como para igualar el máximo valor de la fuerza de roce estático.

La ecuación extra que debemos imponer es, entonces, la correspondiente al equilibrio estático:

$$k\,x_{\text{crítico}} = \mu_e\,m\,g,$$

reemplazando este valor en la expresión de x, obtenemos la velocidad V:

$$V^2 = \mu_c\,g\,D\,\left[2 + \frac{m\,g\,\mu_e}{k\,D}\left(2 + \frac{\mu_e}{\mu_c}\right)\right].\square$$

Este valor de la velocidad corresponde al que produce un máximo de compresión del resorte. Es claro que el resorte pudo haberse detenido antes con el mismo resultado: quedarse estático en dicha posición debido a que la fuerza de restitución del resorte es menor que el máximo de la fuerza de fricción del piso.

Este resultado se puede leer en la última ecuación: allí el término $2\,\mu_c\,g\,D$ corresponde al valor de la velocidad para la cual el resorte no alcanza a comprimirse. El término extra representa el máximo valor *adicional* que puede tener V^2 antes de comprimir el resorte más allá de lo que puede resistir el roce estático.

Cualquier valor de V^2 entre ambos límites produce el mismo efecto: el resorte se detiene después de comprimirse,

$$2\,\mu_c\,g\,D < V^2 < 2\,\mu_c\,g\,D + \frac{m\,g^2\,\mu_e\,\mu_c}{k}\left(2 + \frac{\mu_e}{\mu_c}\right).\square$$

En este último ejemplo no hemos analizado lo que sucede al ponerse en contacto la masa m con el extremo del resorte. Como la masa trae una cierta velocidad y el resorte está en reposo, lo que ocurre es un *choque* entre estos dos objetos. Como se estableció que la masa del resorte era despreciable, bajo esas circunstancias no hay nada que analizar. Sin embargo, una masa finita para la placa ubicada al final del resorte, cambia el problema y, en ese esquema, debemos analizar más cuidadosamente el problema. Este tipo de fenómenos, que incluyen choques, lo estudiaremos en una sección posterior.

X.5. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

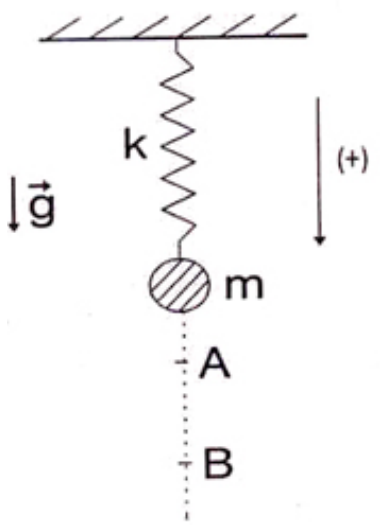
Estudiemos ahora el caso de un sistema masa-resorte que oscila verticalmente incorporando además la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa m. La ecuación de movimiento es,

$$\sum F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Tomando como positivo el sentido que apunta hacia el centro de la Tierra, tenemos:

$$+m\,g - k\,x = m\,\frac{\Delta v}{\Delta t}.\ (+)\downarrow \tag{X.17}$$

Repitiendo el mismo proceso usado anteriormente: multiplicar cada uno de los miembros de esta ecuación por Δx_i y posteriormente sumar estas expresiones a lo largo de la trayectoria, (es decir, integrar las ecuaciones de movimiento), obtenemos:



$$\sum_A^B(+m\,g\,\Delta x_i - k\,x_i\,\Delta x_i) =$$

$$= \sum_A^B m\frac{\Delta v_i}{\Delta t}\,\Delta x_i$$

En esta última ecuación, el primer término establece el trabajo que realizan las fuerzas externas sobre la masa. A la derecha de la igualdad aparece la energía cinética de la masa m. Para ponerla en la forma usual, [X.14], necesitamos trabajar un poco.

Reescribiendo la sumatoria y usando los resultados obtenidos en [X.14] tenemos:

$$+m\,g\sum_A^B \Delta x_i - \frac{1}{2}k\,x_B^2 + \frac{1}{2}k\,x_A^2 = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - m\,v_A^2, \tag{X.18}$$

La sumatoria del primer término es fácil de evaluar, la suma de los Δx_i es el camino total recorrido: $(x_B - x_A)$. Incorporando este resultado, se tiene:

$$+m\,g\,x_B - m\,g\,x_A - \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 + \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_A^2.$$

Reordenando en la forma usual, es decir, todos los términos con el mismo índice en el mismo lado de la ecuación, llegamos a:

$$-mg\,x_A \quad + \quad \frac{1}{2}\,k\,x_A^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 \quad = \quad -mg\,x_B + \frac{1}{2}\,k\,x_B^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_B^2$$

Energía Potencial Gravitacional	Energía Potencial Resorte	Energía Cinética

Vemos que la suma de la energía potencial del campo gravitacional, la energía potencial del resorte más la energía cinética de la masa m toma el mismo valor en cualquier punto de la trayectoria. Ya sabemos que esta propiedad es precisamente una ley de conservación. Indica que hay una cantidad E_0, que no varía a lo largo de la trayectoria:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \text{ constante.} \tag{X.19}$$

Hemos derivado la expresión que toma la conservación de la energía para el caso de un resorte oscilando en un campo gravitacional uniforme. Esta fórmula se obtuvo tomando el eje vertical como positivo cuando apunta hacia el centro de la Tierra. Al definir el sentido opuesto como positivo, sólo debe cambiar el signo frente al término $m\,g\,x$.

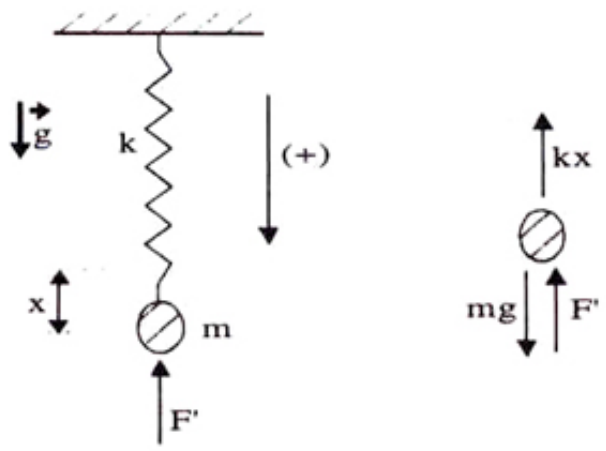
Ejemplo

Mencionamos la diferencia que existe entre soltar súbitamente una masa que cuelga de un resorte y depositarla suavemente de forma que no quede oscilando. En este último caso es fácil encontrar la elongación máxima del resorte, se trata de aplicar una fuerza F' (por parte de la persona que coloca la masa) de forma que mantenga un pequeño desequilibrio del sistema en cada punto.

A continuación calculamos la elongación máxima en las dos situaciones usando el método de la energía.

a) Caso en que la masa se deposita **lentamente** en el resorte.

El resorte tiene inicialmente su largo natural y depositamos la masa m aplicando una fuerza F' que sea un poco menor que el peso de la masa m. Con esto el resorte se estira un poco para aportar la fuerza que falta, enseguida, se disminuye la fuerza F' aplicada, de esta forma el resorte necesita alargarse un poco más para soportar la masa y así el proceso se vuelve a repetir hasta que la fuerza que aporta el resorte cancela exactamente el peso del objeto que se ha colgado.



En ese instante el sistema está en equilibrio, y se cumple:

$$m\,g - k\,x_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}. \tag{X.20}$$

Esta es la elongación máxima alcanzada si la masa se deposita suavemente.

b) Veamos cuál es la elongación máxima del resorte si, estando inicialmente en reposo con su largo natural, unimos la masa m a su extremo y la soltamos súbitamente.

Designamos como origen de coordenadas al punto extremo del resorte en el instante que éste adopta su largo natural.

En el instante $t = 0$, justo cuando *soltamos* la masa, su *velocidad es nula* y también su coordenada x, $x(t = 0) = 0$, puesto que el resorte aún no comienza a alargarse. (Si le hubiésemos dado un impulso inicial, su velocidad sería distinta de cero en ese instante). Su aceleración no es nula y por lo tanto en un instante posterior comenzará a moverse.

Al soltar la masa m el sistema comienza a oscilar y no hay disipación de energía por efecto del roce, por lo tanto E_0 se conserva en la forma que aparece en la ecuación [X.19].

$$E_0 = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx, \tag{X.21}$$

Al evaluar E_0 en $t = 0$, obtenemos:

$$E_0 = 0 + 0 - 0 = 0,$$

de forma que en cualquier otro instante:

$$E_0 = 0 = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,kx^2 - mgx. \tag{X.22}$$

Nos interesa el punto de elongación máxima, porque allí se *detiene* momentáneamente el resorte, y entonces $v(x = x_{\text{máximo}}) = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}k\bar{x}_0^2 - mg\bar{x}_0 && \bar{x}_0 \equiv \text{elongaciones extremas del resorte,}\\
0 &= \bar{x}_0(\bar{x}_0 - 2\frac{m\,g}{k}), && \rightarrow \text{Se obtienen dos soluciones.}\\
\Rightarrow \quad & \bar{x}_0 = 2\frac{mg}{k} && \rightarrow \text{Máxima elongación del resorte al soltar súbitamente la masa } m.\\
\Rightarrow \quad & \bar{x}_0 = 0 && \rightarrow \text{Máxima altura que alcanza la masa } m \text{ en su rebote.}
\end{aligned}
$$

Ambas soluciones tienen una interpretación física: $\bar{x}_0$=0 corresponde a la máxima altura que puede alcanzar esta masa al oscilar alrededor del punto de equilibrio $m\,g/k$.

La elongación asociada a la otra solución es el *doble* de la obtenida al depositar lentamente la masa m. Si nuestro objetivo es alcanzar el punto de rotura del resorte (o la cuerda!), podemos forzar aún más el alargamiento del resorte si inicialmente le imprimimos una cierta velocidad v_0 a la masa m.

Se deja propuesto como ejercicio calcular el valor de la máxima amplitud, $\bar{x}_0$ en este caso. □

Usando la misma ecuación de energía podemos recuperar algunos resultados ya conocidos. Usando esta ley de conservación y eliminando el resorte, es decir haciendo $k = 0$ en las ecuaciones, podemos reobtener una fórmula de cinemática.

$$E_0 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - m\,g\,x, \quad \text{con k = 0.}$$

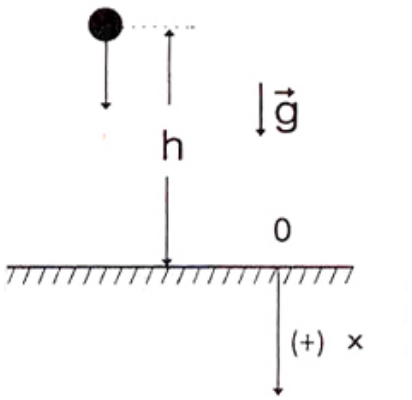
En su forma original, esta ecuación es:

$$\frac{1}{2}m\,v_f^2 - m\,g\,x_f = \frac{1}{2}\,m\,v_i^2 - m\,g\,x_i.$$

Reescribiéndola, se obtiene:

$$v_f^2 - v_i^2 = +2\,g\,(x_f - x_i), \quad \text{(X.23)}$$

Esta es la misma expresión encontrada en el Capítulo II.
Veamos un ejemplo de este tipo.
Con las siguientes condiciones iniciales en $t = 0$: $v = 0$ y $x = -h$, la constante E_0 toma el valor $E_0 = m\,g\,h$.



Al tocar el suelo, $x = 0$. De aquí tenemos:

$$E = m\,g\,h = m\,g\,0 + \frac{1}{2}\,m\,v^2, \qquad \text{entonces,} \qquad v^2 = 2\,g\,h.$$

Esta expresión corresponde a la conservación de la energía para el caso de una *fuerza constante* actuando sobre la masa m. (Note la definición del sentido positivo del eje x usada en este ejemplo).

X.6. PÉNDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Anteriormente demostramos que para oscilaciones pequeñas la ecuación de movimiento de un péndulo en un campo gravitacional podía ser resuelta y su solución correspondía a la de un oscilador armónico.

Resolver las ecuaciones de movimiento significa encontrar $\theta = \theta(t)$.

Haciendo uso de la definición de trabajo podemos encontrar una relación entre la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la posición θ del péndulo para una oscilación de amplitud arbitraria, no sólo de oscilaciones pequeñas como se hizo anteriormente.

Calculemos el trabajo necesario para desplazar el péndulo entre los puntos A y B, arbitrarios. Definimos $\Delta\,x$ como un pequeño desplazamiento que experimenta la masa que cuelga en el extremo de la cuerda:

$$W_A^B = \sum_A^B [-m\,\vec{g}\cdot\Delta\,\vec{x}] + \sum_A^B \vec{T}\cdot\Delta\,\vec{x} = \sum_A^B m\,\vec{v}\cdot\Delta\,\vec{v},$$

como la tensión es perpendicular al desplazamiento $\Delta\,\vec{x}$ de la masa m del péndulo en cualquier punto de la trayectoria, entonces:

$$\vec{T}\cdot\Delta\,x = 0, \quad \text{en todo instante,}$$

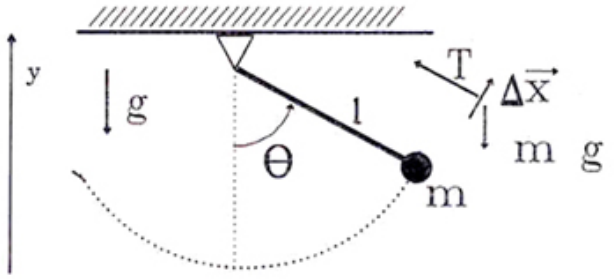


Figura X.8: En el movimiento del péndulo la tensión no realiza trabajo. Sólo la componente vertical del desplazamiento lo hace debido a la fuerza gravitacional.

de esta forma, sólo permanece un término en la expresión del trabajo y, a mano derecha aparece la energía cinética, como es habitual en todos estos casos:

$$W|_A^B = \sum_A^B m\,\vec{g}\cdot\Delta\,\vec{x} = \frac{1}{2}\,\left(m\,\vec{v}_B^2 - m\,\vec{v}_A^2\right).$$

Como se puede apreciar de la Figura [X.8], $\vec{g}\cdot\Delta\,\vec{x} = -g\,\Delta y$, el trabajo realizado para llevar el péndulo de A a B es proporcional a la diferencia de altura $y_B - y_A$, entre las dos posiciones. De esta forma, el valor de la energía entre ambos puntos es:

$$-m\,g\,y_B + m\,g\,y_A = \frac{1}{2}\,\left(m\,\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2\right).$$

Ordenando en la forma usual, obtenemos la conservación de la energía para el caso de un péndulo moviéndose en un campo gravitacional constante:

$$E_o = m\,g\,y + \frac{1}{2}\,m\,\left(\ell\,\dot{\theta}\right)^2, \tag{X.24}$$

donde hemos definido la velocidad tangencial como $\ell\,\dot{\theta}$.

X.7. EJERCICIOS

1.– Un cuerpo de masa m se lanza desde la base de un plano inclinado con velocidad V_o. Si el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano es μ . Calcular:

a) La distancia recorrida hasta que m alcanza su altura máxima.

b) La velocidad con que vuelve al punto de partida.

2.– Una partícula de masa m parte del reposo y se desliza sobre la superficie de una esfera sólida de radio R . Midiendo el ángulo φ desde la vertical, y suponiendo que no existe fricción:

a) Determine la energía cinética de la partícula en función de φ.

b) Las aceleraciones radial y tangencial de la partícula en función de φ.

c) Determine el valor del ángulo φ, para el cual la partícula pierde contacto con la superficie de la esfera.

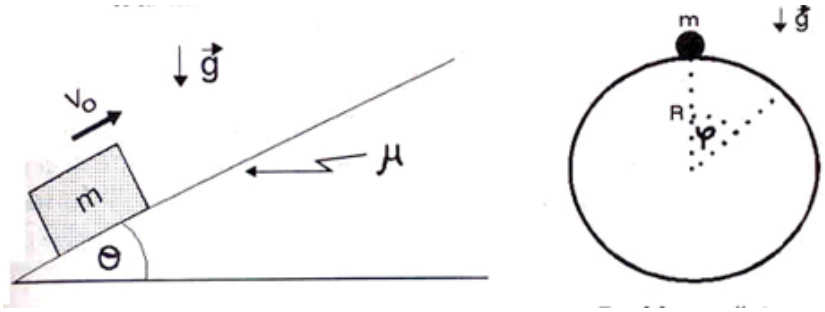


Figura X.9: **Problema # 1** **Problema # 2**

3.– Una partícula de masa m está unida al extremo de una cuerda ideal de largo L, cuyo otro extremo está fijo en C. La partícula parte del reposo, desde la posición ϕ = 0. Si la máxima tensión que puede soportar la cuerda sin cortarse es $(3\,m\,g)/2$, determine el valor de ϕ para el cual se corta la cuerda.

4.– Un bloque de masa **M** se ubica sobre una superficie horizontal con coeficiente de roce estático μ_{est}. Otro bloque de masa **m** se encuentra atado al anterior mediante una cuerda ideal de largo **L**. Inicialmente este último bloque se instala a la misma altura de **M** y a una distancia **d** de la polea indicada en la Figura. La cuerda se encuentra extendida pero sin tensión. En un cierto instante se libera y la masa **m** cae permaneciendo atada a la cuerda. Si **M** y μ_{est} son conocidos, encuentre una expresión para el valor del ángulo ϕ para el cual el bloque sobre la superficie horizontal está a punto de comenzar a deslizar.

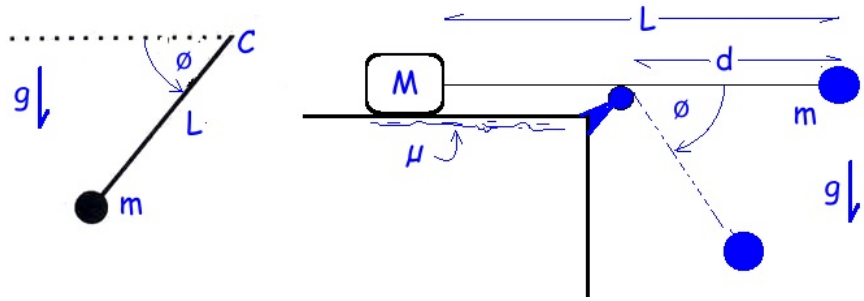


Figura X.10: **Problema # 3** **Problema # 4**

5.– En el sistema de la Figura, la masa m_1 está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural L_o y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa m_1 existe un coeficiente de roce dinámico μ.

Si en t=0 el resorte tiene su largo natural y la masa m_2 tiene una velocidad V_o, determine la velocidad de la masa m_2 en el instante en que ha descendido una altura h con respecto a su posición inicial.

6.– Considere un bloque de masa M colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de constante k y largo natural L_o. Sobre el bloque se coloca una partícula de masa m. Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia d con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa m una vez que se libera el resorte.

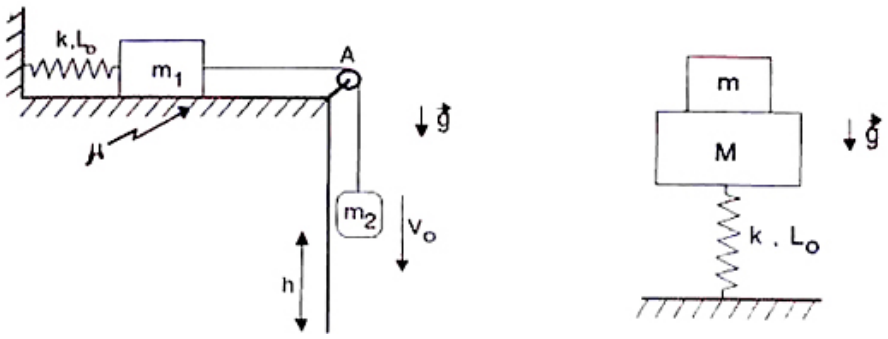


Figura X.11: **Problema # 5** **Problema # 6**

7.– Un resorte, de constante k, se encuentra inicialmente comprimido una distancia x_o, por medio de un hilo. En los extremos del resorte se han *apoyado* dos masas M y m, que se mantienen inmóviles por estar unidas por el hilo.

En cierto instante se corta el hilo y el resorte se expande. La partícula m sale disparada hacia la derecha y se desliza sin roce sobre una pista, que más adelante forma un círculo vertical de radio R. Conocidos M, k, x_o y R encuentre el máximo valor que puede tener m para que esta partícula no deje la pista. Analice el límite M $\to \infty$.

8.– En la Figura se muestra un riel fijo, vertical, pulido y que termina en un arco de circunferencia BC y de radio R. Una partícula de masa m se abandona en reposo en el punto A, y desliza hasta pasar por el extremo del arco C. Con estos datos, calcule:

a) La altura máxima –medida desde el punto C–, que alcanza la partícula.

b) Si al caer, la partícula pasa por el punto D, calcule el valor de CD. (El punto C está a la misma altura que el punto D).

9.– Una partícula de masa m que se desliza sin roce sobre un anillo de radio R, se libera en el punto A. El anillo está unido a un resorte de constante k, cuyo otro extremo está fijo al punto P, a una distancia d del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con los otros largos. Si la partícula parte desde A, con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto B no ejerce ninguna fuerza sobre el aro. Calcule el valor de la distancia d. ¿Puede alcanzar d un valor nulo o negativo? Explique.

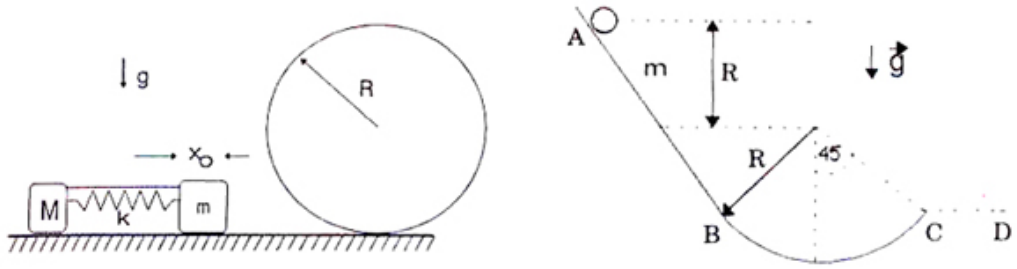


Figura X.12: **Problema # 7** **Problema # 8**

10.– Se coloca una cadena sobre una mesa sin fricción, de forma que la mitad de ella cuelga del borde. Si la cadena tiene largo $2L$ y una masa $2m$.

a.- ¿Cuánto trabajo se requiere para subir la parte que cuelga hasta que quede totalmente sobre la mesa? Suponga que la fuerza aplicada es la justa y necesaria para subir muy lentamente la cadena. Calcule la energía potencial antes y después que la cadena está sobre la mesa.

b.- Considere ahora el siguiente caso. Se requiere subir la cadena y dejarla extendida sobre la mesa en T segundos. ¿Cuál es el trabajo que debe realizar el agente externo para cumplir con este requerimiento?

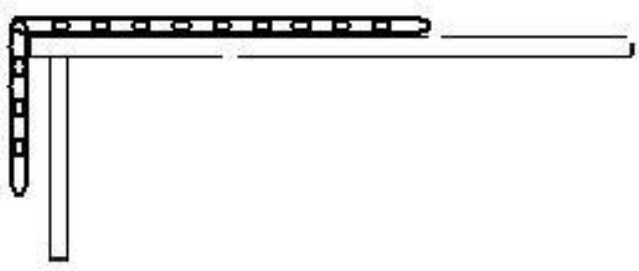


Figura X.13:

Bibliografía

[1] **Matter and Interactions I, Modern mechanics**, R. W. Chabay and B. A. Sherwood, John Wiley and Sons,2007.

[2] **Understanding Physics**, K. Cummings, P. Laws, E. Redish, P. Cooney, John Wiley & Sons, Inc. 2004.

[3] **Física Universitaria**, Harris Benson, Compañía Editora Continental, S. A. de C., México, Primera reimpresión, 1996.

[4] **Newton Rules Biology**, C. J. Pennycuik, Oxford University Press, Oxford,1995.

[5] **Five easy Lessons**, Randall D. Knight, Addison Wesley, **2004**